Frank FEUDEL, Universität Paderborn, DE

Ableitung und Approximation in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Einleitung

Eine der wesentlichen Grundvorstellungen des Ableitungskonzepts ist die Vorstellung der Ableitung als lokale lineare Approximation einer Funktion f in einer Umgebung einer Stelle x (Greefrath u.a., 2016, Danckwerts & Vogel, 2006). Bereits Blum und Kirsch (1979) schlugen vor, den linearen Approximationsaspekt in der Schule zu behandeln und als dessen Anwendung beispielsweise Näherungsformeln wie $e^x \approx 1 + x$ für $x \approx 0$ herzuleiten. In der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler spielt dieser Aspekt eine besonders wichtige Rolle, weil dieser Aspekt das Hintergrundwissen zum Verständnis der ökonomischen Interpretation der Ableitung darstellt, was im folgenden Abschnitt näher beschrieben wird. Deshalb wurde an der Universität Paderborn in einer Studie untersucht, in wieweit Studierende der Wirtschaftswissenschaften zu Beginn ihres Studiums und nach Besuch der Vorlesung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler 1" die Ableitung als lineare Approximation verständig verwenden können. Dabei meint verständige Verwendung, dass sie sich über den Approximationscharakter der Ableitung bewusst sind und diesen auch begründen können.

Bedeutung des linearen Approximationsaspekts der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Die Ableitung $K'(x)$ einer Kostenfunktion K bei einem Output x wird in den Wirtschaftswissenschaften oft als Zusatzkosten bei Erhöhung der Produktion um eine Einheit interpretiert (Schierenbeck & Wöhle, 2003). Eigentlich ist der numerische Wert der Ableitung aber nur eine Approximation dieser Zusatzkosten, nämlich der sich ergebende Wert bei linearer Fortsetzung der Kostenfunktion an der Stelle x. Also steckt hinter dieser ökonomischen Interpretation der Ableitung gerade das Verständnis der Ableitung als lokale lineare Approximation. Formal lässt sich dieser Zusammengang zwischen der Ableitung und den Zusatzkosten über die Approximationsformel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ für $h \approx 0$ herleiten, die man wiederum aus der Definition der Ableitung begründen kann (siehe Feudel (2016) für eine genaue Beschreibung dieses Zusammenhangs). Zum Verständnis der ökonomischen Interpretation der Ableitung ist daher für Studierende der Wirtschaftswissenschaften die Kenntnis der obigen Approximationsformel und des dahinter liegenden Zusammenhangs zwischen der Ableitung und den Zusatzkosten über die lineare Approximation essentiell.

Untersuchungsdesign der Studie

Den Studierenden der Wirtschaftswissenschaften an der Universität Paderborn wurden in einem Vortest im Vorkurs zum Verständnis der Ableitung, der ihnen vor Behandlung der Ableitung vorgelegt wurde, und in der Klausur eine offene Aufgabe gestellt, in denen sie die Ableitung als lineare Approximation verwenden sollten. Im Vortest war dies die folgende Aufgabe:

Gegeben ist die Sinusfunktion mit der Gleichung $f(x) = sin(x)$ (inkl. Skizze). Es ist bekannt, dass $sin(0) = 0$ und $sin'(0) = 1$ ($sin'(x) = cos(x)$ und $cos(0) = 1$).Geben Sie mit Hilfe der Ableitung des Sinus bei $x = 0$ einen Näherungswert für $sin(0{,}1)$ an. Begründen Sie Ihre Antwort!

Es wurde die Sinusfunktion mit diesen Werten gewählt, weil den Studierenden die Sinusfunktion bekannt ist (auch deren Ableitung in NRW auch behandelt wird) und die Werte einfach sind.

In der Klausur wurde die folgende Aufgabe mit einem ökonomischen Kontext gestellt, welche in ähnlichem Format auch in den Übungen zur Vorlesung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler 1“ behandelt wurde:

Ein Unternehmen hat bei einem Output von 5 Mengeneinheiten eines Gutes X Kosten von 10 Geldeinheiten und Grenzkosten von 0,5 Geldeinheiten je Mengeneinheit. Der Output soll von 5 auf 7 Mengeneinheiten gesteigert werden. Ermitteln Sie die dabei entstehenden zusätzlichen Produktionskosten näherungsweise und nennen Sie auch deren Einheit.

Auf die Formulierung „Begründen Sie“ wurde verzichtet, weil den Studierenden aus der Vorlesung bekannt war, dass sie stets den vollständigen Rechenweg aufschreiben müssen. In der Vorlesung wurde zur Lösung solcher Aufgaben die Approximationsformel $f(x+h) - f(x) \approx f'(x) \cdot h$ aus der Definition der Ableitung hergeleitet und durch eine Skizze veranschaulicht, in der dann die exakten Werte $f(x+h) - f(x)$ und der Näherungswert $\Delta T = f'(x) \cdot h$ entlang der Tangente eingezeichnet waren (Dietz, 2013).

Erhebung und Analyse der Daten

Der Vortest wurde im Vorkurs vor Behandlung der Ableitung im September 2015 geschrieben (N=143, der Vorkurs war freiwillig). Die Klausur fand im Februar 2016 statt (N=821).

Die Auswertung der Antworten beider Aufgaben erfolgte durch eine Kategorisierung der Antworten mit qualitativer Inhaltsanalyse. Da es bei der Studie ja nicht um das Ergebnis sondern über den Lösungsweg über die Verwendung der Ableitung als Approximation ging, erfolgte die Kategorisierung der Antworten unter Berücksichtigung der Lösungswege. Im Wesentlichen wurde dabei induktiv vorgegangen, wobei jedoch die korrekten Lösungen des Erwartungshorizonts (Begründung des Näherungswertes von $\sin(0{,}1)$ über die Steigung der Sinusfunktion an der Stelle $x = 0$ im Vortest sowie der in der Vorlesung behandelte Rechenweg zur näherungsweisen Bestimmung der Zusatzkosten über $K(7) - K(5) \approx K'(5)(7-5)$ bei der Klausuraufgabe) als Kategorien im Voraus schon feststanden. Bei der Aufgabe im Vortest führte dies zu 6 Kategorien, bei der Klausuraufgabe führte zu 13 Kategorien. Bei der Kategorienbildung zur Klausuraufgabe wurde bei der Kategorisierung insbesondere berücksichtigt, ob im Rechenweg verdeutlich wurde, dass das ermittelte Ergebnis eine Approximation ist, weil darauf in der Vorlesung Wert gelegt wurde.

Ergebnisse der Studie

Im Vortest konnte fast niemand einen adäquaten Näherungswert von $\sin(0{,}1)$ samt Begründung angeben (siehe Abbildung 1).

Antwortkategorie	Anzahl	Anteil
Keine Antwort	114	79,7%
Ergebnis ohne Begründung	14	9,8%
Falsches Ergebnis mit inadäquater Begründung	9	6,3%
Adäquates Ergebnis mit $\sin(0,1) \approx 0,1$ und Begründung über die Steigung an der Stelle x= 0.	**3**	**2,1%**
Adäquates Ergebnis durch Ablesen am Graphen	2	1,4%
Inadäquates Ergebnis ≈ 0, aber > 0 über Monotonie der Sinusfunktion	1	0,7%

Abbildung 1: Antworten der Studierenden im Vortest bei der Aufgabe zur näherungsweisen Bestimmung von $\sin(0,1)$ (N=143)

In der Klausuraufgabe nach Behandlung des Approximationsaspektes der Ableitung im Zusammenhang mit der ökonomischen Interpretation der Ableitung sah das Ergebnis auf den ersten Blick wesentlich besser aus (siehe Abbildung 2).

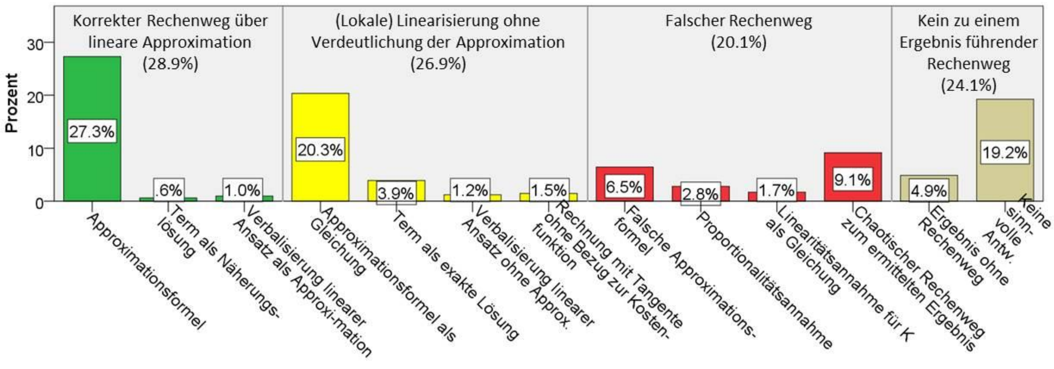

Abbildung 2: Antworten der Studierenden in der Klausur bei der Aufgabe zur näherungsweisen Bestimmung von $K(7) - K(5)$ bei gegebenen $K(5)$ und $K'(5)$ einer Kostenfunktion K (N=821)

Offensichtlich konnten etwa 55% der Studierenden die Ableitung als lineare Approximation zur Bestimmung der Zusatzkosten verwenden. Das ist wesentlich besser als in anderen Studien, wie z.B. bei Bingolbali & Monaghan (2008), wo nur 34% der untersuchten Mathematikstudierenden nach ihrem Analysiskurs eine analoge Aufgabe lösen konnten (Approximation von $f(5{,}08)$ bei gegebenen Werten $f(5)$ und $f'(5)$, wobei $f(5)$ und $f'(5)$ aber noch aus einer Graphik bestimmt werden mussten). Allerdings machten 26,9% unserer Studierenden in ihrem Lösungsweg nicht deutlich, dass das Ergebnis eine Approximation ist. Viele von ihnen schrieben den Näherungsansatz sogar als Gleichung, was bei nichtlinearen Kostenfunktionen streng genommen falsch ist. Dies spricht dafür, dass viele Studierende die Ableitung als Approximation hier nur oberflächlich und nicht verständig anwendeten (d.h. sie haben den Zusammenhang zwischen der Ableitung und den Zusatzkosten über die Approximation vermutlich nicht in allen Details verstanden). Eventuell wurde der Ansatz nur auswendig gelernt.

Ausblick auf weitere Untersuchungen

Die Klausuraufgabe hatte noch einen weiteren Aufgabenteil, nämlich zu begründen, weshalb das ermittelte Ergebnis nicht immer exakt ist. Durch diesen Aufgabenteil soll herausgefunden werden, ob die Studierenden den Zusammenhang zwischen den Zusatzkosten und der Ableitung über die Tangente als lineare Approximation der Ausgangsfunktion kennen.

Literatur

Bingolbali, E. & Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics, 68*(1), 19-35.

Blum, W., & Kirsch, A. (1979). Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen. *Der Mathematikunterricht*, 25(3), 6-24

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. Elsevier, Spektrum Akademischer Verlag.

Dietz, H. M. (2012). *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler: Das ECOMath-Handbuch*. Springer-Verlag.

Feudel, F. (2016). Relevant knowledge concerning the derivative concept for students of economics - A normative point of view and students' perspectives. In Nardi E., Winsløw, C. & Hausberger, T. (Hrsg.): *Proceedings of the First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics* (S. 181-190). Montpellier, France

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H. S., Ulm, V., & Weigand, H. G. (2016). Aspects and "Grundvorstellungen" of the Concepts of Derivative and Integral. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(1), 99-129.

Schierenbeck, H. & Wöhle C. B. (2003). *Grundzüge der Betriebswirtschaftslehre*. Germany: Oldenbourg Verlag.