

Analyse von Studierendenbearbeitungen von Präsenzaufgaben in der linearen Algebra

Lehrveranstaltungen zur linearen Algebra sind traditioneller Bestandteil der ersten Semester eines Mathematikstudiums. Im deutschsprachigen Raum sind sie in den Studiengängen des Gymnasialen Lehramts Mathematik und des Bachelor Mathematik i. d. R. verpflichtend, stellen aber gleichzeitig eine Hürde bei der Bewältigung der Studieneingangsphase dar. Die Vielzahl von neuen Begriffen, Zusammenhängen und logischen Strukturen der linearen Algebra besitzen einen für die Studienanfänger oft unbekanntem Abstraktionsgrad. In der epistemologischen Analyse von Jean-Luc Dorier (2000) wird aufgezeigt, dass die damit einhergehende Formalisierung ein unverzichtbares Wesensmerkmal der linearen Algebra ist.

Studienaufbau

Unsere Studie setzt ihren Schwerpunkt auf die Analyse studentischer Bearbeitungen von Präsenzübungsaufgaben im Rahmen der „Lineare Algebra 1“, die im Wintersemester 2016/2017 an der Universität Paderborn stattfand. Im Rahmen der 90-minütigen Präsenzübungen bearbeiteten die Teilnehmer wöchentlich Übungsblätter unter Anleitung eines Tutors. In diesem Zusammenhang wurden von uns in Absprache mit dem Dozenten und in Abstimmung auf den jeweils aktuellen Lernstoff über das Semester verteilt insgesamt drei zur genaueren Analyse konzipierte Aufgaben zu den Themen „Modulrechnung und Gruppen“, „Vektorräume“ und „Lineare Gleichungssysteme“ in den Übungszettel aufgenommen und im Rahmen der Präsenzübungen behandelt.

Die Aufgaben wurden auf separaten Lösungsbögen bearbeitet und diese anschließend eingesammelt, gescannt und den Studierenden zurückgegeben.

Parallel wurde für eine – bislang noch ausstehende – tiefere Analyse der Lösungsprozesse die Bearbeitung der Spezialaufgaben durch Kleingruppen freiwilliger Veranstaltungsteilnehmer unter Laborbedingungen videografiert.

Forschungsanliegen

Durch die Auswertung der Daten zur Aufgabenbearbeitung streben wir die Beantwortung der nachfolgenden Fragen an:

- *Welche Arbeitsstrategien lassen sich bei Studierenden im Umgang mit Präsenzaufgaben in der linearen Algebra erkennen?*

- Welche typischen Schwierigkeiten treten auf, bzw. welche Inhalte sind problematisch?

In diesem Beitrag beschränken wir uns auf die Vorstellung einiger Ergebnisse anhand der Analyse der Aufgabe zum Thema Vektorräume. Diese wurde in der siebten Semesterwoche direkt nach der axiomatischen Definition von Vektorräumen und Untervektorräumen in die Präsenzübung gestellt und von insgesamt 116 Studienteilnehmern bearbeitet. Die Studierenden hatten zu diesem Zeitpunkt erst wenige und zudem eher abstrakte Beispiele von (Unter-)Vektorräumen im Rahmen der Veranstaltung kennengelernt.

Aufgabe (2) Welche der in a) bis e) angegebenen Teilmengen des \mathbb{R}^2 sind Vektorräume bezüglich der auf \mathbb{R}^2 definierten Addition und skalaren Multiplikation?

- a) $M_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 = 0\}$
- b) $M_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 = 1\}$
- c) $M_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = -2, x_2 = -1\}$
- d) $M_4 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2^2 = 0\}$
- e) $M_5 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \leq 0\}$
- f) Versuchen Sie nun, alle Unterräume des \mathbb{R}^2 zu finden. Machen Sie sich klar, warum Sie wirklich *alle* Unterräume gefunden haben. Ein formaler Beweis ist nicht notwendig.

Abbildung 1: Aufgabe zum Thema Vektorräume in der linearen Algebra 1 im Wintersemester 2016/2017

Methoden und Auswertung

Die Analyse der schriftlichen Bearbeitungen erfolgte analog zur Vorgehensweise in Biehler et al. (2015) im Abgleich mit einer sogenannten *student expert solution* (SES). Dabei handelt es sich um eine Musterlösung, die auf dem jeweils vorlesungsaktuellen Kenntnisstand auf Studierendenniveau (d. h. ohne weiterführendes Wissen zum Thema) beruht und zusätzlich Meta-Informationen zur Lösung enthält, wie etwa explizite und implizite Kompetenzerwartungen, Ausführungen verschiedener möglicher Lösungsansätze und ausformulierte Lernziele.

Bei der Auswertung der schriftlichen Bearbeitungen wurde ein zweistufiges Verfahren angewendet. Der erste Analyseschritt ergab eine Kategorisierung nach Korrektheit der Lösungen sowie eine Sammlung von Auffälligkeiten wie bevorzugte Lösungsansätze und häufige Fehler in den einzelnen Aufgabenteilen. Auf dieser Basis wurde ein detailliertes Codierungssystem erstellt, mit dessen Hilfe und im Abgleich mit der SES alle Einzelbearbeitungen im Detail analysiert und kategorisiert werden konnten.

Exemplarische Ergebnisse

Im Folgenden wird diese Vorgehensweise exemplarisch für Aufgabenteil (d) der in Abbildung 1 dargestellten Aufgabe erklärt.

Für die Prüfung der drei Unterraumkriterien wurden drei Codes vergeben. Zur Lösung der Aufgabe musste entweder die Abgeschlossenheit der Menge M_4 bezüglich Addition (Code (d15)) oder bezüglich der skalaren Multiplikation (Code (d21)) überprüft werden. Das Codierungsschema wird in Abbildung 2 dargestellt.

$$(d) M_4 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2^2 = 0\}$$

Code	Unterraumkriterium	mögliche Ansätze
(d12)	$(0, 0) \in M_4$	gilt, da $0 - 0^2 = 0$
(d15)	$v + w \in M_4$ für $v, w \in M_4$	gilt nicht; Widerlegung mit oder ohne Gegenbeispiel
(d21)	$a \cdot v \in M_4$ für $v \in M_4, a \in \mathbb{R}$	gilt nicht; Widerlegung mit oder ohne Gegenbeispiel

Abbildung 2: Codierung der Lösungsbestandteile am Beispiel von Aufgabenteil (d)

Von insgesamt 116 vorliegenden Bearbeitungen des Aufgabenteils (d) entfielen 82 auf den Lösungsansatz (d15), auf den wir uns nachfolgend konzentrieren. Die angewandten Lösungsstrategien und Fehler wurden für den Lösungsansatz (d15) wie in Abbildung 3 dargestellt kategorisiert.

Endung	Bsp. Code	Bedeutung des Codes	Bedeutung des Beispielcodes
g	d15g	Gegenbeispiel	Es wurde ein Gegenbeispiel betrachtet, um die Abgeschlossenheit der Addition zu widerlegen.
h	d15h	Allgemeiner Prüfungsansatz der Summe	Die Addition wurde für abstrakte Vektoren (z. B. $v = (v_1, v_2)$) betrachtet, d. h. ohne das Einsetzen konkreter Zahlen für v_1 und v_2 .
z	d15hz	$v - w$ anstelle von $v + w$ betrachtet	Der allgemeine Prüfungsansatz wurde für $v - w$ angewendet.
l	d15hl	Logikfehler	In der (abstrakten) Betrachtung der Addition wurde ein Logikfehler gemacht, z. B. unlogischer Gleichungsaufbau.
m	d15hm	Einsetzfehler	Beim Prüfung der Bedingung $v_1 - v_2^2 = 0$ in der Addition unterlief ein typischer Fehler.
x	d15gx	Fehler oder unvollständige Lösung	Bei der Betrachtung des konkretes Gegenbeispiel wurde ein Fehler gemacht oder ein unvollständiges Beispiel angegeben.
xs	d15hxs	kleiner Mangel	Kleinerer Mangel beim abstrakten Ansatz, der die Argumentation der Lösung nicht entscheidend beeinträchtigt.

Abbildung 3: Auszug aus den Codierungen der unterschiedlichen Strategien und Fehlertypen, hier exemplarisch zur Prüfung der Abgeschlossenheit der Addition in Aufgabenteil (d).

Die Kategorisierung sowie inhaltliche Bewertung auf Korrektheit der Lösungen führte u. a. zu den in der nachfolgenden Abbildung dargestellten Ergebnissen.

Wertung	Code	Häufigkeit
korrekt	d15g	34
	d15h	1
kleine Mängel	d15gxs	2
	d15hxs	22
nicht korrekt	d15x	23

Abbildung 4: Auszug der Ergebnisse der Analyse der Bearbeitungen zum Code (d15)

Die Ergebnisse der Auswertung zu diesem Aufgabenteil legen nahe, dass von vielen Teilnehmern die korrekte Verwendung von Gegenbeispielen zur Widerlegung mathematischer Aussagen noch nicht verstanden oder akzeptiert wurde. Der auffällig häufig gewählte „Allgemeine Prüfungsansatz“ (Endung h) zur Widerlegung der Abgeschlossenheit der Addition *ohne* konkretes Gegenbeispiel mag zudem darauf zurückzuführen sein, dass die Teilnehmer zu Beginn der Bearbeitung noch nicht wussten, ob sie die Abgeschlossenheit im konkreten Fall zeigen oder widerlegen mussten, und daher mit einem Beweisansatz starteten, der zu einem Widerspruch führte. Dennoch fällt auf, dass bei diesem abstrakteren Ansatz insgesamt deutlich mehr (kleinere) Fehler gemacht wurden, als bei der Rechnung mit Zahlen und der Angabe eines konkreten Gegenbeispiels.

Ausblick

Die tiefere Analyse der auftretenden Fehlertypen, die weitere Beforschung der Motivation zur Auswahl der Lösungsstrategien anhand des aufgezeichneten Videomaterials sowie die detaillierte Analyse der beiden anderen Aufgaben sind Gegenstand unserer weiteren Forschung.

Literatur

- Biehler, R., Kortemeyer, J. & Schaper, N. (2015). Conceptualizing and studying students' processes of solving typical problems in introductory engineering courses requiring mathematical competences. In K. Krainer & Nad'a Vondrová (Eds.), *Proceedings of the CERME 9* (pp. 2060-2066). Prag: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME
- Dorier, J.-L. (2000): Epistemological Analysis of the Genesis of the Theory of Vector Spaces. In: Dorier, Jean-Luc (Hrg.). *On the Teaching of Linear Algebra. Dordrecht 2000*, 1-81