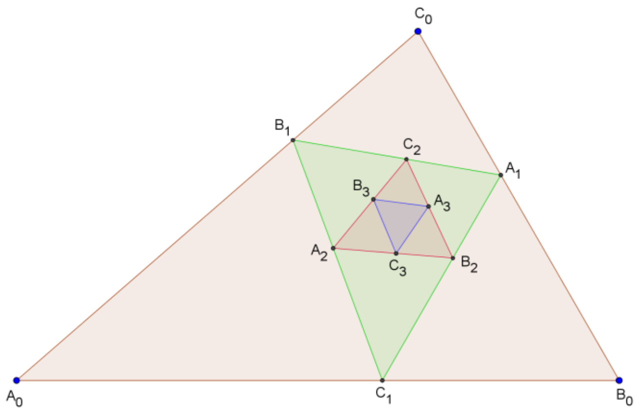
Hans HUMENBERGER, Franz EMBACHER, Universität Wien, AT

Geometrische Iterationen – Konvergenz von Dreiecksformen

Meist denkt man bei *Konvergenz* an Zahlenfolgen oder Kontexte aus dem Bereich der Analysis. Es gibt aber auch interessante – und *vor allem gut zu veranschaulichende* – Konvergenzfragen im Bereich der Elementargeometrie. Teilweise sind diese so elementar, dass sie auch für den Regelunterricht in der Schule in Frage kommen. Besonders hervorgehoben sei schon an dieser Stelle, dass hier eine Dynamische Geometrie-Software (DGS, z. B. GeoGebra) sehr gute Dienste leisten kann. Man sieht dadurch „viel auf einmal“ in einer eindrucksvollen Art und Weise und wird in den zugehörigen Vermutungen durchaus bestärkt.

> **Problem 1:** (vgl. Jones 1990) Gegeben sei ein beliebiges Dreieck $A_0B_0C_0$. Die Berührpunkte seines Inkreises bilden das nächste Dreieck $A_1B_1C_1$. So macht man einige Schritte weiter und kann beobachten, dass die Dreiecke $A_nB_nC_n$ „immer gleichseitiger“ werden. (Offener: Was kann man bei der Form der Dreiecke $A_nB_nC_n$ beobachten?) Ist das immer so? Lässt sich diese Beobachtung auch begründen?

Als erstes wird man das einmal mit DGS konstruieren, in der Abbildung sind drei Schritte gezeichnet. Durch Ziehen an den Punkten A_0, B_0, C_0 kommt man schnell zur Überzeugung, dass bei diesem Prozess die Form der Dreiecke der „Gleichseitigkeit“ beliebig nahe kommt. Aber wie kann man das begründen?



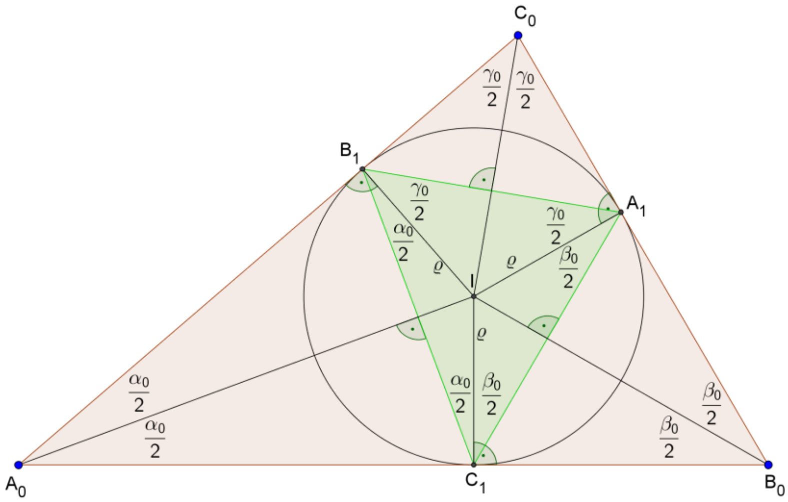
Als zusätzliche Frage (das ist eigentlich schon ein Hinweis zur Lösung) könnte man stellen:

- Was kann über den Winkel α_1 im Dreieck $A_1B_1C_1$ ausgesagt werden, wenn im Ausgangsdreieck $A_0B_0C_0$ der Winkel α_0 der *kleinste* Dreieckswinkel ($\alpha_0 \le \beta_0 \le \gamma_0$) ist?

Durch diese Zusatzfrage ist es naheliegend, sich mit *Winkeln* (statt mit Seitenlängen) zu beschäftigen. Wenn man DGS als Messinstrument benutzt, wird man feststellen: Bei α_1 scheint es sich um den *größten* Winkel im Dreieck $A_1B_1C_1$ zu handeln. Man wird sich vielleicht auch um die anderen Winkel kümmern und feststellen: $\alpha_0 \le \beta_0 \le \gamma_0 \Rightarrow \gamma_1 \le \beta_1 \le \alpha_1$, d. h. bei den

Winkeln wird offenbar die Größenreihenfolge „umgedreht“, dies wird wohl bei jedem Schritt so sein . . . . Kann man das allgemein begründen? Hilft dieses Phänomen bei der Lösung des ursprünglichen Problems (Konvergenz der Form zur Gleichseitigkeit)?

Wie kann man die Beobachtung, dass die Winkel alle dem Wert 60° zustreben, begründen? Dazu wird man zunächst einmal die einzelnen Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ genauer studieren. Die Winkelhalbierenden und der Inkreismittelpunkt spielen nun eine wichtige Rolle (wir beschränken uns auf die beiden Dreiecke $A_0B_0C_0$ und $A_1B_1C_1$).



Weil die Inkreisradien normal auf die Seiten stehen und $A_0I \perp B_1C_1$ gilt (analog $B_0I \perp A_1C_1$ und $C_0I \perp A_1B_1$), folgt $\sphericalangle C_1B_1I = \frac{\alpha_0}{2} = \sphericalangle B_1C_1I$ (analog für die anderen Winkel). Daraus ergibt sich unmittelbar

$$\alpha_1 = \frac{\beta_0 + \gamma_0}{2}, \quad \beta_1 = \frac{\alpha_0 + \gamma_0}{2}, \quad \gamma_1 = \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2}. \qquad (1)$$

D. h. die drei „neuen“ Winkel sind die paarweise arithmetischen Mittelwerte der „alten“. Das ist klarerweise auch bei jedem weiteren Schritt so. Daher ist es schon sehr *plausibel*, dass sich die drei Winkel einander immer besser annähern, die Unterschiede zwischen ihnen also von Schritt zu Schritt besser „ausgemittelt“ werden. Mit dieser Darstellung der Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ erhält man die Implikation $\alpha_0 \le \beta_0 \le \gamma_0 \Rightarrow \gamma_1 \le \beta_1 \le \alpha_1$ (analog allgemein: $\alpha_n \le \beta_n \le \gamma_n \Rightarrow \gamma_{n+1} \le \beta_{n+1} \le \alpha_{n+1}$), womit gezeigt ist, dass die Größenreihenfolge bei jedem Schritt wie vermutet „umgedreht“ wird. Aus (1) folgt sofort eine weitere Darstellung (man bedenke $\beta_0 + \gamma_0 = 180° - \alpha_0$)

$$\alpha_1 = 90° - \frac{\alpha_0}{2}, \quad \beta_1 = 90° - \frac{\beta_0}{2}, \quad \gamma_1 = 90° - \frac{\gamma_0}{2}. \qquad (1‘)$$

Wie kann man nun strenger begründen, dass hinsichtlich der Form der Dreiecke Konvergenz herrscht: $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \to 60°$?

Am einfachsten – und für den Schulunterricht am besten – betrachtet man die Differenzen zum vermuteten Grenzwert 60° (wir beschränken uns hier auf die α-Werte): Die Startdifferenz beträgt $\delta_0 := \alpha_0 - 60°$, die nächste Differenz beträgt $\delta_1 = \alpha_1 - 60°$, und durch Einsetzen von α_1 aus (1‘) erhält man:

$$\delta_1 = 30° - \frac{\alpha_0}{2} = -\frac{1}{2}\delta_0 .$$

Dies gilt mit demselben Argument auch für alle weiteren Schritte: Von Schritt zu Schritt *halbiert* sich die Differenz zu 60° und wechselt ihr Vorzeichen: $\alpha_n - 60° = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot (\alpha_0 - 60°) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, daher $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 60°$ (und analog für β_n bzw. γ_n).

> **Problem 2:** (vgl. Ismailescu/Jacobs 2006, S. 173) Gegeben sei ein beliebiges Dreieck $A_0B_0C_0$. Die (den Eckpunkten näher gelegenen) Schnittpunkte seines Inkreises mit den Winkelhalbierenden bilden das nächste Dreieck $A_1B_1C_1$. So macht man einige Schritte weiter und kann beobachten, dass die Dreiecke $A_nB_nC_n$ „immer gleichseitiger“ werden.

Problem 2 ist sehr ähnlich zu Problem 1, es kann ähnlich einfach gelöst werden, ist also auch für die Schule geeignet. Dies ist nicht bei allen solchen Problemen so (nimmt man z. B. die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit den *Gegenseiten* als nächste Dreieckpunkte, so hat man ebenfalls Konvergenz der Form nach zur Gleichseitigkeit, aber der Beweis ist ungleich komplizierter; Ismailescu/Jacobs 2006, S. 176 ff). Der Nachteil der Probleme 1 und 2 ist, dass die Dreiecke dabei beliebig klein werden, so dass man immer weiter in die Zeichnung „hineinzoomen“ muss. Dieser Nachteil wird vermieden in

> **Problem 3:** Gegeben sei ein beliebiges Dreieck $A_0B_0C_0$ mit seinem Umkreis *k*. Wir zeichnen die Mittelsenkrechten des Dreiecks $A_0B_0C_0$ und schneiden[1] diese mit *k*. Dabei ergeben sich die Punkte A_1, B_1, C_1 und somit das nächste Dreieck $A_1B_1C_1$. So macht man einige Schritte

[1] Die Mittelsenkrechten haben immer *zwei* Schnittpunkte mit dem Umkreis, man muss dabei festlegen, welche Schnittpunkte man für das nächste Dreieck nimmt: Wir nehmen immer jenen Kreisschnittpunkt, den man erhält, wenn man vom Seitenmittelpunkt Richtung Dreiecks*äußeres* geht (man könnte auch immer Richtung Dreiecksinneres gehen, dann erhielte man die am Umkreismittelpunkt *U* punktgespiegelte Version des Dreiecks $A_1B_1C_1$).

weiter und kann beobachten, dass die Dreiecke $A_nB_nC_n$ „immer gleichseitiger" werden. (Offener: Was kann man bei der Form der Dreiecke $A_nB_nC_n$ beobachten?) Ist das immer so? Lässt sich diese Beobachtung auch begründen?

Auch dieses Problem 3 ist so elementar zu behandeln wie die Probleme 1 und 2, daher auch für den Schulunterricht geeignet. Würde man in Problem 3 die *Mittelsenkrechten* durch die *Winkelhalbierenden* ersetzen, so wäre die Begründung schon ein wenig komplizierter, denn man bräuchte dann den *Peripheriewinkelsatz*, der nicht mehr allgemeiner Schulstoff ist.

Fachdidaktisches Resumé

Die angesprochenen Probleme sind von ihrem Phänomen her recht einfach. Man kann mit neuer Technologie (Dynamische Geometrie) die jeweilige Situation gut *explorieren* und so auf Vermutungen bzw. erste Bestätigungen (je nach Aufgabenformulierung) kommen. Hier gestattet es die Dynamik dieser Programme, einen guten Überblick über die Situation zu bekommen, das sind wertvolle Momente im *Prozess* des Betreibens von Mathematik. Es sind auch Momente, in denen (wieder einmal) darüber gesprochen werden kann, dass DGS-Experimente natürlich keinen Beweisanspruch (im mathematischen Sinn) haben können: Erstens kann man mit DGS nicht wirklich beweisen, „DASS ES SO IST" (man kann die Vermutung nur eindrucksvoll bestärken), zweitens trägt DGS zum sehr wichtigen Aspekt „WARUM ES SO IST" in der Regel nichts bei.

Die Begründungen sind – wie gezeigt – so einfach, dass sie durchaus im Regelunterricht in der Schule stattfinden können. Das Phänomen der *fortgesetzten Mittelwertbildung* liefert bei den Problemen 1 und 3 schon ein Plausibilitätsargument für die Konvergenz. Je nach Lerngruppe kann auch ein mehr formaler Beweis der Konvergenz angestrebt werden. Diese und verwandte Probleme können auf verschiedensten Niveaustufen (Unterstufe bis Universität) behandelt und dabei *Mathematik als Prozess* betont bzw. erlebt werden. Wir interpretieren das als Zeichen für das hohe fachdidaktische Potential der angesprochenen Probleme.

Literatur

Ismailescu, D., Jacobs, J. (2006): On sequences of nested triangles. In *Periodica Mathematica Hungarica*, Vol. 53 (1–2), 169–184.

Jones, St. (1990): Two Iteration Examples. In *The Math*. Gazette, Vol. 74, 58–62.