Karl Josef FUCHS, Gregor MILICIC, Paris-Lodron-Universität Salzburg, AT

Hat Algorithmisches Denken Platz im Mathematikunterricht der Sek II?

1. Bestandsaufnahme

Zahlreich sind die Reformen in den naturwissenschaftlichen Fächern in der Sekundarstufe II. Kompetenzorientierter Unterricht ist das neue Modewort. Gemeint ist damit die Koppelung der Lehrstoffe der einzelnen Schulstufen mit Handlungsfertigkeiten, die die Schüler(innen) bei Abschluss einer gewissen Klasse besitzen sollen. Eine Kompetenz der Praktischen Informatik, die durchaus Bedeutung für die Mathematik besitzt, ist jene des *Algorithmischen Denkens* (Fuchs & Caba 2016). Sie hat aber bisher keinerlei Berücksichtigung in den Kompetenzkatalogen für Mathematik gefunden. Denken wir nun aber bei dieser Fähigkeit von Schüler(inne)n an eine umfassende Handlungskompetenz im Rahmen des Modellierens, so rücken Eigenschaften wie die *Endlichkeit* oder *Effizienz* (*Laufzeit*) von Algorithmen in den Fokus des Interesses (Fuchs & Milicic 2016, S. 220). Diese Fähigkeit zur kritischen Betrachtung und Bewertung wird doch zweifelsfrei in der Numerischen Mathematik, etwa beim Lösen großer linearer (Un)gleichungssysteme, sehr geschätzt. Um eine Antwort auf unsere Frage, die zugleich der Titel unseres Beitrags ist, zu erhalten, haben wir Schüler(innen) einer Sekundarstufe II im Rahmen eines Forschungsprojektes einen Unterricht, in welchem die genannten Aspekte eines Algorithmischen Denkens behandelt wurden (EMMA 2016), unterrichtet. Über die, der Planung zugrundgelegten, fachdidaktischen Prinzipien, über den Ablauf des Kurses sowie über bedeutende Beobachtungen und Ergebnisse werden wir in unserem Beitrag berichten.

2. Der Unterricht als Prozess

Verfahren aus der Numerik bieten sich im überfachlichen Bereich als Thema zwischen der Mathematik und der Informatik als Werkzeuge zur Vermittlung des Algorithmischen Denkens geradezu an. Geringe, relativ einfach zu verstehende mathematische Änderungen im Algorithmus können die Eigenschaft erheblich beeinflussen und zu verbesserten Verfahren führen. Zwingend zum Verstehen und Durchdringen der Verfahren nach einer theoretischen Betrachtung ist dann die Modellbildung im Sinne des Algorithmischen Denkens. Erst durch die konkrete Umsetzung am Computer werden scheinbar vernachlässigbare Ausnahmefälle relevant und kleinere Änderungen im Algorithmus nachvollziehbar. Im Algorithmischen Denken finden daher beide Fächer eine Antwort auf den oft gemachten Vorwurf der praxisfernen und daher schwer zu motivierenden Anwendungen.

Neben der damit einfachen Motivation dieser Verfahren ist zudem die Vielzahl der vermittelbaren Kompetenzen ein weiteres Argument zur Einbindung des Algorithmischen Denkens in den Schulunterricht. Die Verfahren werden zuerst durchgesprochen und an einfachen, aus dem Schulunterricht bekannten Problemstellungen dem genetischen Prinzip folgend, ausgeführt. Danach findet ein Abstraktionsschritt, auf eine beliebe Anzahl von Gleichungen oder von einem konkreten System auf ein allgemeines Gleichungssystem, statt.

Die Modellierung auf Basis des Pseudocodes erfordert grundlegende Programmierkenntnisse, ein Transfer vom Pseudocode in die Programmiersprache unter Beachtung der algorithmischen Zusammenhänge ist dabei erforderlich.

Anknüpfend können mit den Verfahren diverse Experimente durchgeführt werden. Die Bewertung der Ergebnisse und der Vergleich der Verfahren anhand von verschiedenen Kriterien stehen dabei im Fokus. Auf Basis der Beobachtungen können Rückschlüsse auf die Problemstellungen und die Anwendbarkeit der Verfahren gezogen werden, sodass nach einer Analyse neuer, unbekannter Problemstellungen die Auswahl der passenden Verfahren durch die Lernenden möglich ist.

Die Experimente verdeutlichen zudem einen meist für die Lernenden ungewohnten Charakter der Mathematik, die *Ergebnisoffenheit*. Auch wenn theoretisch die Konvergenz der Verfahren sichergestellt ist, sind numerische Experimente bezüglich der Effizienz und der Rechenzeit notwendig um die Praxistauglichkeit zu untersuchen. Je nach Anwendung und Fragestellung können dabei andere Kriterien relevant sein und zur Nutzung von unterschiedlichen Verfahren führen, es gibt selten „das eine richtige Verfahren“.

2.1. Exemplarischer Unterrichtsverlauf und Inhalte

Beispielhaft für die Einführung von numerischen Verfahren wird eine so bereits im Rahmen des EMMA-Projektes gehaltene Unterrichtssequenz (Milicic 2016) zur Modellbildung mit anschließenden Experimenten von iterativen Verfahren (Jacobi-, Gauß-Seidel- und SOR-Verfahren) zur Lösung von linearen Gleichungssystemen (Meister 2015) vorgestellt.

Bei praxisrelevanten Problemstellungen (Reaktions-Diffusions-Gleichungen, Deformationsprozesse) treten häufig dünn besetzte, d.h. viele Nullelemente enthaltene, Matrizen auf. Direkte Verfahren bieten für kleine Probleme eine effiziente Lösungsstrategie, können jedoch diese spezielle Problemstruktur nicht ausnutzen.

Zuerst wird mit dem von der Schule bekannten, direkten Gauß-Verfahren ein aus 3 Gleichungen bestehendes System gelöst, welches bei einem Deformationsprozess auftritt. Es folgt ein erster Abstraktionsschritt vom konkreten System hin zu einem allgemeinen Gleichungssystem mit 3 Unbekannten. Als erste Idee wird ein iteratives Verfahren konstruiert, bei dem die i-te Gleichung nach der i-ten Unbekannten gelöst wird, welches dem Jacobi-Verfahren entspricht. Nacheinander werden dann die Gauß-Seidel- und SOR-Verfahren eingeführt. Wie erwähnt erfolgt ein zweiter Abstraktionsschritt zu einem System mit n Gleichungen und Unbekannten. Mögliche Abbruchbedingungen (Residuum, Veränderung in den Iterierten) und eine Durchsprache des Pseudocodes und des Konvergenzbegriffs runden den Modellierungsteil der Unterrichtssequenz ab. Die Lernenden setzen dann die Verfahren im Projektunterricht möglichst selbstständig am Computer um.

Im zweiten Teil wird mit den Verfahren für spezielle, vorher bereit gestellte Problemstellungen experimentiert, als Untersuchungsschwerpunkte bieten sich dabei die Genauigkeit, die benötigte Rechenzeit sowie die Anzahl der Iterationen an. Nachdem die Lernenden die Konvergenz und Anwendbarkeit der Verfahren für die Problemstellungen untersucht und ermittelt haben, werden die theoretisch notwendigen Eigenschaften der Gleichungssysteme für die Konvergenz genannt. Gemeinsam wird dann besprochen, ob die experimentell untersuchten Problemstellungen die Eigenschaften aufweisen und die beobachteten Ergebnisse mit den theoretischen Aussagen übereinstimmen.

Neben einer kurzen Präsentation der erstellten und benutzten Unterrichtsmaterialien werden die Herausforderungen für die Lernenden sowie die an der HTL in Braunau gemachten Erfahrungen im Mittelpunkt der Betrachtungen stehen. Vertiefungsmöglichkeiten, sowohl im Bereich der Mathematik als auch der Informatik, und Ausblicke auf weiterführende Unterrichtssequenzen werden aufgezeigt.

2.2. Herausforderungen für die Lernenden und gemachte Erfahrungen bei der Durchführung

Neben den erforderlichen Abstraktionsschritten stellen auch die Begriffe der Konvergenz und Divergenz für die Lernenden Herausforderungen dar. Häufig sind iterative Verfahren vollkommen unbekannt, das vorzeitige Terminieren und damit ungenaue Lösen eines Problems ist ein bis dahin ungewohnter Aspekt in der vermeintlich streng und ausschließlich exakten Mathematik.

Gerade diese Erfahrung und Eröffnung einer neuen Sichtweise hat den Schüler(inne)n in Braunau viel Freude bereitet. Bei der Modellierung wurde zudem der Ehrgeiz entfacht, es gab regelrechte Wettberechnungen welche Implementation die schnellere und für größere System noch anwendbar war. Ein besonderer Reiz lag für die Schüler(innen) natürlich auch im Wissen über die Aktualität dieser Verfahren für die Forschung und Praxis. Für gewöhnlich werden die iterativen Verfahren erst im zweiten oder dritten Semester des Mathematikstudiums eingeführt, entsprechend stolz waren die Schüler(innen) bereits in der Schule mit diesen Verfahren umzugehen.

3. Anmerkungen zur Didaktik und Methodik

Aus Sicht der Fachdidaktik finden aufgrund der Thematik ‚Anwendungsorientierung' das Problem-Based Learning (Weber 2007) sowie das Genetische Prinzip/die Genetische Methode (Wittmann 1981, S. 130ff) als theoretische Konzepte Berücksichtigung. Handlungsorientierter / Fächerübergreifender Unterricht werden die vorherrschenden Methoden in einem entdeckenden Unterricht sein.

4. Resümee

Das großartige Feedback der Schülerinnen und Schüler ermutigt uns, Algorithmisches/Problemlösendes Denken weiterhin in den Mittelpunkt eines sinnstiftenden, anwendungsorientierten Mathematikunterrichts zu stellen. Fachdidaktische Diplomarbeiten und Dissertationen werden vertiefende Betrachtungen zur Implementierung einzelner Konzepte anstellen und praktikable Unterrichtsbeispiele entwickeln müssen.

Literatur

EMMA (2016) – http://www.uni-salzburg.at/index.php?id=67559 – zuletzt geöffnet 18.10.2016

Fuchs, KJ & Caba, H. (2016). Algorithmisches/Lösungsorientiertes Denken – Eine Kernstrategie in der Praktischen Informatik in der Schule. *SCHULE AKTIV – Coding* – Sonderheft des BMB, 6-8.

Fuchs, KJ & Milicic, G. (2016). Algorithmisches Denken im Anwendungsorientierten Unterricht. In G. Maresch & J. Zumbach *Didaktik der Naturwissenschaften – Neue Horizonte in Biologie*, *Geometrie und Informatik* (Hrsg.), (S. 217-225), Wien: facultas Universitätsverlag.

Meister, A. (2015). *Numerik linearer Gleichungssysteme*. Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Milicic, G. (erscheint noch 2016). Iterative Löser für lineare Gleichungssysteme. *Mathematik im Unterricht*.

Weber, A. (2007). *Problem-Based Learning*. Bern: h.e.p.-Verlag.

Wittmann, E. Chr. (1981). *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg Verlag.