Florian FÜLLGRABE, Andreas EICHLER, Universität Kassel, DE

Beweisakzeptanz bei Studierenden des Lehramts

Um das Beweisen im schulischen und universitären Kontext zu lehren und zu lernen, ist es hilfreich, zu wissen, was unter „Beweisen“ verstanden wird und welchen Stellenwert es in der Mathematik hat. Zu dieser Frage existiert in der Forschung allerdings kein Konsens (Reid & Knipping, 2010). Folglich kann es auch keinen Konsens über die eng damit verknüpfte Frage geben, wann „etwas“ als Beweis gelte bzw. akzeptiert wird. Umgekehrt ist es dann aber umso interessanter, zu wissen, wann „etwas“ aus Sicht von Lernenden als Beweis akzeptiert wird und warum dies so ist. Das vorgestellte Projekt soll dabei helfen, ein umfangreicheres und vertieftes Verständnis von Beweisakzeptanz verschiedener Populationen von Lernenden zu schaffen. In diesem Beitrag wird allein der Schritt zur Bildung von Kategorien zur Beweisakzeptanz betrachtet. Dazu werden vorab der theoretische Rahmen und die Vorgehensweise skizziert.

1. Theoretischer Rahmen

Beweisakzeptanz scheint über die Untersuchung logischer Strukturen hinauszugehen (Weber & Alcock 2004), zumal es für die Validität von Beweisen ohnehin keine allgemein akzeptierten Kriterien gibt (Hanna & Jahnke, 1996). Tatsächlich wird auch auf die Rolle nichtmathematischer Faktoren bei der Beweisakzeptanz hingewiesen (Hanna, 1991): Beweisakzeptanz scheint ein sozialer Akt zu sein (Manin, 1977) oder auch das Resultat einer (individuellen) psychologischen Überzeugtheit (Hersh, 1993; Reid & Vallejo-Vargas, 2016).

2. Das Gesamtprojekt

Die zentrale Frage des Projekts ist, wie Lernende unterschiedlicher Populationen Beweise hinsichtlich der Akzeptanz beurteilen.

Die Erhebung besteht zunächst aus zwei Teilen. Als erstes sollen Lernende eine mathematische Aussage selber zeigen, also einen Beweis konstruieren. Es wird dabei erhofft, durch diesen Teil tiefere Einblicke dahingehend zu erhalten, wie Lernende Beweise beurteilen, wenn man dies mit ihrer Fähigkeit, Beweise zu konstruieren, kontrastiert. Im Anschluss sollen sie einen Fragebogen anhand eines vorgelegten, zunächst direkten und formal-symbolisch verfassten, Beweises ausfüllen. Dieser Beweis zeigt dieselbe mathematische Aussage, die bereits vorher bearbeitet wurde und wird aus einer Menge von drei unterschiedlichen Beweisen zufällig ausgewählt. Die drei Beweise unterscheiden sich dabei hinsichtlich ihrer Ausführlichkeit. Mit

Ausführlichkeit ist die Anzahl an Beweisschritten gemeint. Es gibt eine Unterteilung in „kurz", „mittel" und „lang", wobei „kurz" sehr wenige Beweisschritte umfasst und „lang" sehr viele. Dabei betrachten wir normativ lediglich „kurz" als Beweis mit gewisser Argumentationslücke. Durch die Zunahme an Beweisschritten wird die Argumentation mitunter auch kleinschrittiger. Der Unterscheidung liegt die Hypothese zugrunde, dass zusätzliche formal-symbolische Beweisschritte den Beweis überzeugender und erklärender gestalten und dadurch die Beweisakzeptanz erhöhen.

Der Fragebogen orientiert sich an den Arbeiten von Kempen (2016). Es wird auf einer Likert-Skala von 1 bis 6 (mit 1 „stimme voll zu" und 6 „stimme überhaupt nicht zu") bewertet, ob (i) es sich bei der Begründung um einen mathematischen Beweis handle, ob (ii) der Lernende nach Auseinandersetzung mit der Begründung fest davon überzeugt ist, *dass* die Behauptung auch tatsächlich wahr ist und ob (iii) die Begründung ausreichend viele Erklärungen aufweist, sodass der Lernende nun weiß, *warum* die Behauptung wahr ist. In Erweiterung des Fragebogens von Kempen (ebd.) soll der Lernende begründen, warum er die Aussagen (i) bis (iii) so bewertet hat. Es soll zudem begründet werden, welche Argumente der Lernende ergänzen würden, um in (i) bis (iii) eine höhere Bewertung zu erzielen und welche Argumente ggf. weggelassen werden können, ohne dass sich die Bewertung in (i) bis (iii) verschlechtert.

3. Die Teilstudie

Die erste Erhebung wurde bei 160 Studierenden des Grundschullehramts am Ende der Veranstaltung „Arithmetik und Geometrie" durchgeführt. Diese Veranstaltung wird im ersten Semester des Studiums belegt. Die zu zeigende mathematische Aussage ist:

„Wenn $c|a$ und $c|b$, dann gilt $c|(a+b)$ für alle natürlichen Zahlen a,b,c".

4. Erste Ergebnisse der Teilstudie

Im Folgenden diskutieren wir strikt beschreibend die in den Äußerungen der Studierenden am häufigsten vorkommenden, induktiv entwickelten Codierungen und zwar beschränkt auf die Begründungen der Studierenden zum Item (i) „bei der Begründung handelt es sich um einen mathematischen Beweis".

Die drei am häufigsten vergebenen Codes sind AV: „allgemeingültig / verifizierend mit 35%, MF: „mathematisch / formal" mit 15,6% und nVB: „nicht vollständig / zu wenig Beweisstruktur" mit 21,3% der genannten Codes. Diese werden im Folgenden illustriert:

AV Studierendenaussage als Ankerbeispiel	Definierendes Element
„Es handelt sich um einen mathematischen Beweis, da es allgemein gezeigt wurde“	Allgemeingültigkeit
„Es ist allgemeingültig aufgrund der Variablen“	Variablen für Allgemeingültigkeit
„Allgemein bewiesen, nicht an Beispielen“	Nicht beispielgebunden
MF Studierendenaussage als Ankerbeispiel	**Definierendes Element**
„Bei der Begründung wurde mathematische vorgegangen“	Beweis ist mathematisch (ohne Erläuterung)
„Der mathematische Beweis ist formal gehalten“	Beweis ist formal
„Es handelt sich um einen formalen Beweis, der somit mathematisch ist“	Formal bedeutet mathematisch
nVB Studierendenaussage als Ankerbeispiel	**Definierendes Element**
„Ich stimme teils zu, da bei dem Beweis bzw. der Begründung Schritte fehlen“	Nicht vollständig
„Für einen mathematischen Beweis fehlt die richtige Beweisstruktur“	Beweisstruktur fehlt (ohne Erläuterung)
„Jedoch fehlt die Beweisstruktur, also Behauptung, Beweis, Schlussfolgerung bzw. ist nicht ganz vollständig“	Beweisstruktur besteht aus Behauptung, Beweis, Schlussfolgerung
„[…], weil für mich bzw. für einen Beweis q.e.d. oder ■ gefehlt hat“	„Abschluss“ eines Beweises fehlt

5. Diskussion der Teilstudie

Allgemeingültigkeit wird aus Sicht mancher Studierenden durch Variablen hergestellt, die als Charakteristikum eines „formalen“ Beweises interpretiert und mitunter synonym mit „mathematisch“ verwendet werden.

Im Unterschied dazu wird der Beweis nicht explizit aufgrund einer Fehlerfreiheit akzeptiert. Die genauen Gründe sind nicht ersichtlich. Möglicherweise wird (durch das Setting oder die vorherige eigene Beweiskonstruktion) von vornherein von einer Korrektheit bzw. Gültigkeit ausgegangen oder dies gilt als keine notwendige Bedingung für die Akzeptanz oder es können keine Aussagen hinsichtlich der Validität getätigt werden.

Aufgrund der großen Häufigkeit der Codes AV und MF einerseits und der nicht expliziten Validierung andererseits lässt sich die Hypothese aufstellen, dass die Beweisakzeptanz der Studierenden im besonderem Maße auf oberflächlichen Argumenten basiert. Sie kann mit Blick auf nVB gestützt werden, da ein wesentliches Akzeptanzkriterium das Einhalten gewisser Formalien im Sinne einer festen Struktur ist: „bei einem mathematischen Beweis müssen einige formale Dinge beachtet werden, z.B. Behauptung, Folgerung etc." Diese Vorstellung geht mitunter sogar so weit, dass ein „q.e.d." am Ende des Beweises maßgeblich für die Beweisakzeptanz ist.

Da umgekehrt insgesamt aber eher kurze und vielleicht implizite Argumente im Fragebogen genannt werden, besteht die Notwendigkeit weiterer Untersuchungen, z.B. durch vertiefende Interviews. Diese können Aufschluss über die sehr überraschend häufig genannte notwendige Beweisstruktur geben (11,3% aller Codes, als Subcode von nVB) oder darüber, was die Studierenden genau mit Begriffen wie „formal" oder „mathematisch" meinen und ob damit automatisch Allgemeingültigkeit zusammenhängt.

6. Ausblick

Zur vertiefenden Betrachtung werden im nächsten Schritt Interviews geführt. Ebenfalls werden die weiteren Teile der Studie analysiert und zueinander in Beziehung gesetzt. Es folgen weitere Erhebungen der Beweisakzeptanz in anderen Studiengängen und perspektivisch auch in der Schule.

7. Literatur

Hanna, G. (1991). Mathematical Proof. In D. Tall (Hg.), *Advanced Mathematical Thinking* (S. 54–61). Dordrecht: Springer Netherlands.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and Proving. In A. J. Bishop (Hg.), *Kluwer international handbooks of education* (Bd. 4, S. 877–908). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), S. 389–399.

Kempen, L. (2016). Beweisakzeptanz bei Studienanfängern: Eine empirische Untersuchung. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. 1111–1114). Münster: WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Manin, Y. I. (1977). *A Course in Mathematical Logic. Graduate Texts in Mathematics: Bd. 53*. New York, NY: Springer.

Reid, D. A., & Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education: Research, learning and teaching*. Rotterdam, Boston, Taipei: Sense Publishers.

Reid, D. A., & Vallejo-Vargas, E. (2016). *When is a generic argument a proof? Präsentiertes Paper in der TSG-18,* ICME 13, Hamburg, 24. – 31. Juli.

Weber, K., & Alcock, L. (2004). How do mathematicians validate proofs? In McDougall, D. E., Ross, J. A. (Hg.), *Proceedings of the Twenty-sixth Annual Meeting of the PME-NA* (Bd. 2, S. 622–628).