Michael GAIDOSCHIK, Freie Universität Bozen, IT, Kora Maria DEWEIS, Alpen Adria Universität Klagenfurt, AT

Schwierigkeiten beim Ableiten von Einmaleinsaufgaben: Empirische Befunde und mögliche didaktische Konsequenzen

1. Ableiten als Kernelement aktueller Ansätze zum Lehren des 1x1

In der aktuellen Fachdidaktik scheint Einigkeit darüber zu bestehen, dass bei der unterrichtlichen Behandlung des kleinen Einmaleins im 2. und 3. Schuljahr das *Ableiten* gezielt thematisiert und gefördert werden sollte. Das Speichern und Abrufen von 1x1-Aufgaben im und aus dem Gedächtnis wird demgemäß in der ersten Phase nur für die „Kernaufgaben" (Verdoppeln, Verfünffachen, Verzehnfachen, nach einigen AutorInnen auch Quadratzahlaufgaben) angestrebt. Alle anderen Aufgaben sollen sich die Kinder zunächst möglichst vorteilhaft rechnerisch erschließen, indem sie operative Zusammenhänge zu Kernaufgaben nutzen. Begründet wird dies zum einen mit übergeordneten Zielen des Mathematikunterrichts (u.a. durchgehender Primat des Verstehens; Erwerb von Strategien, die über das Einmaleins hinausreichen). Zum anderen weisen Studien darauf hin, dass (Übung im) Ableiten das spätere Automatisieren der zunächst abgeleiteten Aufgaben unterstützt (vgl. dazu u.a. Gaidoschik 2014; Gasteiger und Paluka-Grahm 2013).

Kinder müssen zum einen bis 100 sicher und flüssig addieren, subtrahieren, verdoppeln und halbieren können, um 1x1-Aufgaben gleichfalls sicher und flüssig ableiten zu können. Zum anderen fordert *verständiges* Ableiten Einsicht in die operativen Zusammenhänge, die einzelnen Ableitungswegen zugrunde liegen. Für Kinder, die Ende des ersten Schuljahres im Bereich des *Einspluseins* ableiten, konnte Gaidoschik (2010) Varianten und Abstufungen von Einsicht in Ableitungsstrategien rekonstruieren. Viele der von ihm interviewten Kinder nutzten bestimmte Strategien nur für einzelne Aufgaben, während sie bei anderen Aufgaben, die mit derselben Strategie vorteilhaft hätten gelöst werden können, auf Zählstrategien zurückgriffen. Analoge Phänomene sind beim Ableiten im Bereich des Einmaleins zumindest denkbar. Dabei scheint plausibel, dass dies davon abhängt, ob und wie Strategien im Unterricht erarbeitet werden (vgl. Sherin und Fuson 2005).

Allerdings gibt es kaum empirische Forschung zur Frage, ob und wie Kinder unterschiedlicher Leistungsstufen Ableitungsstrategien für das Einmaleins verstehen und anwenden (Gasteiger und Paluka-Grahm 2013; vgl. auch Köhler 2015 zu ihrem eigenen diesbezüglichen Dissertationsprojekt). Eine Erweiterung der Befundlage wäre hilfreich bei der Beurteilung und Weiterentwicklung einschlägiger Unterrichtskonzepte. Dabei sollte zusätzlich zu den von den Kindern verwendeten Strategien mit untersucht werden, ob und wie in deren Unterricht das Ableiten vorbereitet, erarbeitet und geübt wurde.

2. EKG: Ein Entwicklungsforschungsprojekt zum kleinen Einmaleins

Am Projekt EKG (Einmaleins konsequent ganzheitlich unterrichten) nahmen von September 2014 bis April 2016 acht Kärntner Volksschulklassen mit ihren Klassenlehrkräften der zunächst zweiten und dann dritten Schulstufe teil. Die Lehrkräfte wurden vom Autor dieses Beitrags in insgesamt 12 jeweils vierstündigen Seminaren während des zweiten und dritten Schuljahres fachdidaktisch begleitet. Zentraler Inhalt der Seminare waren Anregungen zur Vorbereitung und Behandlung des kleinen Einmaleins im zweiten Schuljahr, die im Detail in Gaidoschik (2014) veröffentlicht wurden und hier nur in Stichworten umrissen werden können:

- Fokus auf dem Aufbau von Verständnis für Bündelungs- und Positionsprinzip und darauf aufbauenden Rechenfertigkeiten (Addieren, Subtrahieren, Verdoppeln, Halbieren) in der ersten Hälfte des 2. Schuljahres
- Sorgfältige Erarbeitung von Grundvorstellungen zur Multiplikation; beharrliches Einfordern von Übersetzungen zwischen symbolischen, enaktiven und ikonischen Repräsentationen. Dabei sollte durchgehend darauf geachtet werden, dass Kinder klar unterscheiden und erläutern können, welche Zahl vervielfacht wird und welche Zahl angibt, wie oft dies geschieht (vgl. Schipper et al. 2015, S. 103). Erst auf dieser Basis sollte die Kommutativität der Multiplikation verständnisbasiert erarbeitet werden, gestützt v.a. auf rechteckigen Punktefeld-Darstellungen.
- Erarbeitung und Absicherung des Verdoppelns und Verzehnfachens, dann Verfünffachens durch Halbieren des Zehnfachen; gezielte Erarbeitung weiterer Ableitungen im Rahmen von „Strategietagen", die jeweils nur einem Aufgabentyp gewidmet sind: 9mal-Aufgaben; 6mal-Aufgaben; 4mal-Aufgaben; 3mal-Aufgaben. Bei konsequenter Nutzung der Kommutativität sind dann nur noch für $7 \cdot 7$, $7 \cdot 8/8 \cdot 7$ und $8 \cdot 8$ Strategien zu finden. Die Fokussierung auf einzelne Aufgabentypen sollte je nach Bedarf auch wiederholt erfolgen, ergänzt um gezielte Übungen im *Auswählen* passender Strategien bei Mischung der Typen.
- Zum Zwecke der *Erarbeitung* der Strategien sollten Kinder jeweils herausgefordert werden, für Aufgaben eines bestimmten Typs geschickte Lösungswege zu finden. Sofern in der anschließenden Rechenkonferenz nicht schon von Kindern vorgebracht, sollten eine oder je nach Aufgabentyp auch mehrere bewährte Ableitungsstrategien von der Lehrkraft materialgestützt vorgestellt werden.
- Dem Konzept gemäß ist zunächst Automatisierung der 2mal-, 10mal- und bald auch 5mal-Aufgaben anzustreben. In weiterer Folge wird auf

das Einschleifen verstandener Ableitungswege für einzelne Aufgabentypen abgezielt, etwa unter Einsatz einer Lernkartei (Gaidoschik 2014).

Im Projektverlauf wurden die Lehrkräfte 4 Mal ausführlich zu ihrem Unterricht befragt. Lernmaterialien und Arbeitshefte der Kinder wurden eingesehen, je 2 bis 3 Unterrichtsstunden besucht, beobachtet und analysiert. In Summe machen die Erhebungen deutlich, dass die skizzierten Eckpunkte des Konzepts von allen Lehrkräften im Wesentlichen umgesetzt wurden.

Um zu untersuchen, wie Kinder auf Basis dieses Unterrichts Strategien für 1x1-Aufgaben (weiter-)entwickeln, wurden aus jeder der 8 Klassen je 6 Kinder ausgewählt. Je 2 dieser Kinder waren von ihrer Lehrkraft zu Beginn des 2. Schuljahres als stark, schwach bzw. durchschnittlich in Mathematik eingestuft worden. Mit diesen 48 Kindern wurden insgesamt je 7 qualitative Interviews durchgeführt, inhaltlich abgestimmt darauf, was im Unterricht jeweils bereits erarbeitet worden war. Im Fokus der letzten 4 Interviews (Mai/Juni des 2., Oktober/April des 3. Schuljahres) standen Grundvorstellungen zur Multiplikation und Lösungsstrategien für 15 1x1-Aufgaben (7 Kernaufgaben, 8 Nicht-Kernaufgaben mit Faktoren größer als 5). Wir können im Folgenden nur kurz über Typen von Schwierigkeiten berichten, die sich bei einigen wenigen Kindern noch im 3. Schuljahr beim Ableiten zeigten. Es sei aber betont, dass solche relativ selten waren. 40 der 48 Kinder lösten im April des 3. Schuljahres zumindest 13 der 15 gefragten Aufgaben entweder durch Faktenabruf oder zügiges Ableiten.

3. Typen von Schwierigkeiten beim Ableiten noch im 3. Schuljahr

Von den verbleibenden 8 Kindern mit schwächeren 1x1-Kenntnissen griff nur eines von sich aus bei *keiner* der 15 zu rechnenden Aufgaben auf eine Ableitungsstrategie zurück. Es löste 5 der 15 Aufgaben durch Faktenabruf, eine durch vollständiges Auszählen mit Fingerhilfe und verweigerte bei den restlichen, eine Lösung auch nur zu versuchen. Dieses Kind addierte und subtrahierte zählend und konnte weder 70 noch 90 halbieren. Es scheint klar, dass Ableiten auf dieser Basis nicht gelingen und dem Kind nicht als sinnvolle Strategie erscheinen kann. Auf direkte Befragung konnte das Kind aber erläutern, wie $9 \cdot 7$ aus $10 \cdot 7$ abzuleiten ist. Daneben demonstrierte das Kind solide Grundvorstellungen zum Multiplizieren als wiederholtes Addieren.

Dies gilt auch für ein zweites Kind, das trotz ähnlich großer Defizite beim Addieren und Subtrahieren dennoch von sich aus wiederholt versuchte, Malaufgaben abzuleiten. Das gelang ihm höchst mühsam in ca. 65 Sekunden bei $7 \cdot 8$, welches es aus dem auswendig gewussten $9 \cdot 8=72$ durch zweimaliges Zurückzählen um je 8 löste. Zwei Mal ging es von passenden Kernaufgaben aus, rechnete dann aber unpassend weiter ($6 \cdot 4$ als $5 \cdot 4+5$, $6 \cdot 9$ als $5 \cdot 9+5$).

Solche Fehler in der *Logik* des Ableitens machten im April des 3. Schuljahres nur noch 2 weitere Kinder. Die anderen 4 Kinder dieser leistungsschwächsten Gruppe lösten 5 bis 8 der 8 Nicht-Kernaufgaben durch Ableitung und wählten dabei durchgehend richtige Ableitungswege. Das Ableiten bereitete ihnen jedoch erkennbare Mühe, dauerte bei einzelnen Aufgaben bis zu 120 und mehrheitlich länger als 10 Sekunden. Es ließ sich im Interview zumeist nicht klären, ob dabei das *Rechnen* so lange dauerte oder ob das Kind (auch) länger nachdachte, um eine geeignete *Strategie* zu finden. Einige der gewählten Strategien waren rechnerisch höchst aufwändig. So wurde $7 \cdot 7$ von einem Kind in ca. 20 Sekunden als $3 \cdot 7+3 \cdot 7+7$ errechnet.

4. Diskussion und Ausblick

Schwierigkeiten beim Ableiten waren im April des 3. Schuljahres auch bei leistungsschwächeren Kindern relativ selten. Das ermutigt uns zur Weiterarbeit an diesem Konzept der gezielten Erarbeitung von Ableitungsstrategien. Die referierten Probleme einzelner Kinder verweisen auf unterschiedliche didaktische Herausforderungen, denen in einem geplanten 2. Zyklus des Entwicklungsforschungsprojekts erhöhte Aufmerksamkeit geschenkt werden soll: Zum einen zeigte sich, wenig überraschend, dass Defizite im Addieren und Subtrahieren beim Ableiten schwer ins Gewicht fallen. Das spricht unseres Erachtens nicht gegen dieses Konzept, sondern dafür, mit leistungsschwächeren Kindern vorbereitend und begleitend noch intensiver im additiven Bereich zu arbeiten. Zum anderen zeigen Fehler wie $6 \cdot 4=5 \cdot 4+5$, wie wichtig es ist, Ableiten an *präzise* Vorstellungen und zunehmend abstrakte, aber weiterhin präzise Gedanken zu *operativen Veränderungen* zu koppeln. Solche Vorstellungen und Gedanken (zur Ausgangsaufgabe wird der Multiplikand noch einmal dazugegeben, der Multiplikator wird verdoppelt und daher auch das Produkt…) erfordern jeweils eine klare inhaltliche Unterscheidung von Multiplikator und Multiplikand (ohne dass dafür diese Termini ins Spiel gebracht werden müssen). Um solche Vorstellungen und Gedanken zu fördern und dauerhaft wachzuhalten, sollten Kinder auch nach der Erarbeitungsphase immer wieder angehalten werden, Ableitungswege (auch materialgestützt) zu erläutern. Dies war zwar Teil des EKG-Konzepts, mit Blick auf leistungsschwächere Kinder scheint uns aber eine Intensivierung und Erweiterung diesbezüglicher Bemühungen geboten.

Literatur

Gaidoschik, M. (2014). *Einmaleins verstehen, vernetzen, merken. Strategien gegen Lernschwierigkeiten.* Seelze: Kallmeyer.

Die vollständige Literaturliste und weitere Literaturhinweise können unter michael.gaidoschik@unibz.it angefordert werden.