

Tempelbilder und Barrierebänder als Prozessanalyse-Tools

Mit diesen in Gawlick (2016) eingeführten Tools zeigt Gawlick (2017) Unterschiede von Prozessen hinsichtlich Umgang mit Barrieren und Lösungserfolg auf und vergleicht das mit anderen Analyseinstrumenten im Hinblick auf Fragen wie: a) Was unterscheidet erfolgreiche von erfolglosen Prozesse? b) Wie unterscheiden sich Prozesse von Experten und Novizen?



Abb. 1: Grundformen des Barrierebandes

Der Bearbeitungsprozess von Problemen ist nach Dörner (1976,10) charakterisiert durch das Auftreten von Barrieren. Es gliedert den Prozess in Teile, die das Barriereband visualisiert: Auf ein *barrierefreien* Anfangsstück (BF) folgt das zentrale Ereignis *Barriere erscheint* (BE), wo der Bearbeiter eine nicht realisierbare Absicht fasst, die wir auch als *Barriere* bezeichnen (Gawlick & Lucyga 2015). Wenn nicht *aufgegeben* (AB) oder die *Barriere ignoriert* (BI) wird, folgt der wichtigste Teil des Prozesses: der *Passageversuch* (PV). Er kann zum *Überwinden* (BÜ) oder *Umgehen* (BU) der Barriere führen, aber auch zum *Scheitern* (BS) an ihr, so dass ein *Lösungsweg gefunden* wird (LG) oder dass die *Suche scheitert* (LS), s. Abb. 1.

Der PV ist charakterisiert durch die Formen der Umorientierung bei Misserfolg von Dörner (1976, 65ff): Zwischenzielbildung, Erneute Operatorsuche, Wunsch bzw. Absichtswechsel, Zielwechsel, Startpunktwechsel oder Wechsel des Heurismus. Ein PV deutet auf ein zuvoriges BE hin.

Barriereschritt und -typen anhand der TIMSS-Aufgabe K10

Die Bestimmungsaufgabe K10 lautet: *Das Dreieck ABC liegt so auf einem Kreis, dass AB Durchmesser ist. Berechne $\angle AMB$, wenn M der Inkreis-Mittelpunkt ist.* Bei der Lösung ist eine Barriere zu überwinden, die α - β -Barriere: Um $\mu = \angle AMB$ mit dem Innenwinkelsummensatz (IWS) aus α_1 und β_1 berechnen, muss man sich von der Absicht lösen, die Größen der Hilfswinkel explizit zu berechnen und erkennen, dass ihre Summe dafür schon ausreicht. Beim Lösen muss der *Barriereschritt vollzogen* (BV) werden, d.h. Schritt 7 der Standardlösung in Abb. 2. In der Praxis treten daneben auch weitere Typen von Barrieren auf – wir unterscheiden in Anlehnung an das Phasenmodell von Pólya (1949):

Verstehensbarriere: Start oder Zielzustand können nicht identifiziert werden – bei K10 kann dem Bearbeiter die Notation $\angle AMB$ unvertraut sein.

Planfindungsbarriere: Hier sind die nötigen Hilfsmittel und Zwischenziele

zwar bekannt, daraus kann aber kein gangbarer Lösungsansatz gebildet werden. Bei K10 wäre denkbar, dass der IWS nicht ins Spiel gebracht wird, weil zu wenig andere Winkel gegeben sind oder bestimmbar scheinen.

Plandurchführungsbarriere: Hier erweist sich der gefundene Ansatz als nicht realisierbar. Die α - β -Barriere ist von diesem Typ.

Abb.2 erläutert das Entstehen und Überwinden der Verstehens- (VE-BÜ), Findungs- (FE-BÜ) und Durchführungsbarriere (DE-BÜ). Nur die letztere kann auch umgangen werden (durch Zerlegen des Ergänzungswinkels). Die letzte Spalte zeigt den jeweils erreichten Lösungsfortschritt im Tempelbild.

| # | Schritt | Begründung |
|---|---|-------------------------|
| 0 | Was ist $\angle AMB$? $\angle AMB = \mu$ | Skizze |
| 1 | Wie kann ich μ berechnen? $ \mu = 180^\circ - \alpha_1 - \beta_1 $ | IWS in ABM |
| 2 | AM, BM WH | M=MPI, Satz vom Inkreis |
| 3 | $ \alpha_1 = \alpha /2 ; \beta_1 = \beta /2$ | 2 |
| 4 | $ \mu = 180^\circ - \alpha /2 - \beta /2$ | 1,3 |
| 5 | Wie kann ich α und β berechnen? $ \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ | IWS in ABC |
| 6 | $ \gamma = 90^\circ$ | SdT: n.V. |
| 7 | $ \alpha + \beta = 90^\circ$ | 5,6 |
| 8 | $ \mu = 180^\circ - 90^\circ/2 = 135^\circ$ | 4, 7 |

Abb. 2: K10-Lösungsweg und -tempel, mögliche Barrieren und Hilfsgrößen

Vergleichende Prozessanalyse mit Tempelbilder und Barrierebändern

Das Barriereband zu einem Problembearbeitungsprozess zeigt, wie weit der Bearbeiter in Pólyas Phasenmodell kommt, ob er auf Barrieren stößt und wie

er mit ihnen umgeht, vgl. Abb.3. Es beschreibt Prozessverlauf und Erfolg *qualitativ*, so dass damit die einleitenden Fragen beantwortet werden können. Der Anteil der erreichten Tepelemente ist dabei ein *quantitatives* Erfolgsmaß. Beide zusammen ermöglichen Rückschlüsse auf die gezeigte Kompetenz (Gawlick 2017).

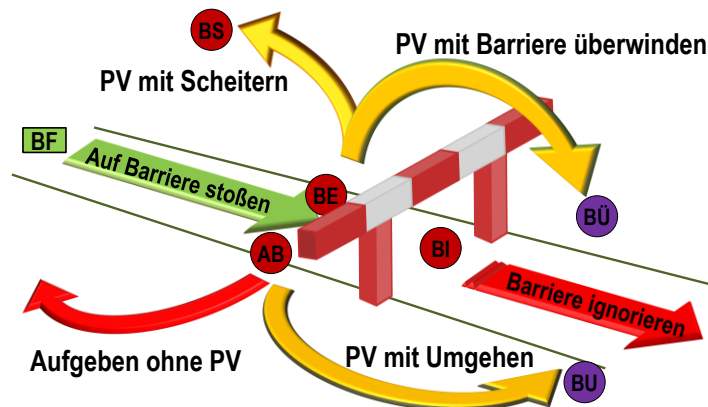


Abb.3: Die Formen des Umgangs mit Barrieren unterscheiden sich im Ausmaß der erfolgten Problemlösebemühungen

Barrierebänder lassen sich in eine Rangordnung bringen – dabei ist die Wertigkeit einer Barriere umso höher, je später sie erscheint:

$$DE > FE > VE$$

Zweites Kriterium ist die kognitive Komplexität der Problemlöseversuche:

$$BF > BÜ > BU > BS > BI, AB$$

Die Wertung von BF beruht dabei auf der Annahme, dass die Barrieren im Zuge früherer Bearbeitungen überwunden und dieses verinnerlicht wurde.

Indikatoren für erfolgreiches Problemlösetraining in Barrierebändern

Im HeuRekAP-Projekt wurde ein Heuristiken- und Argumentationstraining (vgl. dynamische-geometrie.de/heuristik/HeuReKaP/index.htm) entwickelt und evaluiert. Dazu wurden vier Klassen eines Hannoveraner Gymnasiums über einen Zeitraum von eineinhalb Jahren untersucht. Jeweils eine der beiden Trainings- und Vergleichsklassen waren math.-nat. Profilklassen. 3 Monate, nachdem K10 von ihnen in einem Test bearbeitet worden war, wurden daraus 46 SuS mit nichtleeren Bearbeitungen ausgewählt und beim erneuten Lösen mit lautem Denken videographiert.

Die Barrierebänder dazu wurden wie o.a. klassifiziert (Beispielanalysen: Gawlick (2017)) – aus der theoretisch denkbaren Vielfalt von Bandverläufen treten 14 Typen tatsächlich auf (Abb. 4), die Ausschnitten des Musterbandes in Abb. 2 entsprechen. Neu ist nur der Typ BUI: Hier wird die α - β -Barriere durch Übergang zum Spezialfall zu umgehen versucht – indes wird ignoriert, ob und wie er auf den allgemeinen Fall übertragbar ist. Typ BUI kommt nur in der trainierten Profilklassen vor, dito Typ BF, der offenbar gewandt genug ist, den α - β -Schritt barrierefrei zu machen. Die 4 „Überwinder“ (BE-BÜ) verteilen sich hälftig auf die Profilklassen, so dass insgesamt 7 trainierte und

2 untrainierte Probanden K10 lösen. Das verfehlt knapp die Schwelle zur schwachen Signifikanz (Fisher's Exact Test, $p=.11$)

Die Bänder der trainierten Profilkategorie liegen aber in der Rangordnung höher als die der Vergleichskategorie. Dieser Effekt ist statistisch signifikant (Mann-Whitney-U-Test: $n_{1/2}=9$, $p<.01$). Die Prozessanalyse mit Barrierebändern kann also Trainingseffekte aufzeigen und zwar auf die Problemlösekompetenz mehr als auf das Ergebnis – welche das sind und worauf sie beruhen, ist durch detaillierte Prozessanalyse zu untersuchen.

| Barrierebehandlung | Bandtyp | Ereignisse in Pólya-Phasen | | Math.-natw. Profil | | | |
|--------------------|----------------|----------------------------|-------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|
| | | | | mit | | ohne | |
| | | PE | PD | Vergleich Klasse A | Training Klasse D | Vergleich Klasse B | Training Klasse C |
| BF | BF | BF | | | | | |
| BÜ | DE-BÜ | | DE PV BÜ | | | | |
| | FE-BÜ | FE PV | PV BÜ | | | | |
| BUI | BU-DE-BI | BU | DE PV BI | | | | |
| BS | DE-BV-BS | | DE PV BV BS | | | | |
| | DE-BS | | DE PV BS | | | | |
| | FE-DE-BS | FE | PV DE PV BS | | | | |
| | FE-BV-BS | FE PV BV BS | | | | | |
| | FE-BS | FE PV BS | | | | | |
| BI | DE-BI | | DE PV BI | | | | |
| | FE-BÜ-DE-BV-BI | FE PV BÜ | DE PV BV BI | | | | |
| | FE-BÜ-DE-BI | FE PV BÜ | DE PV BI | | | | |
| | BV-FE-BI | BV FE PV BI | | | | | |
| | FE-BI | FE PV BI | | | | | |

Abb.4: Die 14 vorkommenden Typen von Barrierebändern in absteigender Reihenfolge

Literatur

Dörner, D. (1976): *Problemlösen als Informationsverarbeitung*. Stuttgart: Kohlhammer.
 Gawlick, Th. (2016): Tempelbilder zur Visualisierung in/von Problemlöseprozessen. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Münster: WTM.
 Gawlick, Th. (2017): Analyse von Problemlöseprozessen mit Tempelbildern und Barrierebändern. Erscheint in: *Herbsttagung des GDM-Arbeitskreises Problemlösen 2016*. Münster: WTM
 Pólya, G. (1949): *Schule des Denkens*. Bern: Francke.