Solveig JENSEN, Hedwig GASTEIGER, Universität Osnabrück, DE

Ergänzen mit Erweitern und Abziehen mit Entbündeln – Ergebnisse einer explorativen vergleichenden Studie zu spezifischen Fehlern und Verständnis des Algorithmus

Theoretischer Hintergrund und Ziel

Für die schriftliche Subtraktion gibt es verschiedene Verfahren, die sich in der Art der Differenzbildung und der Erklärung des Stellenübergangs unterscheiden. Knapp 40 Jahre lang war in Deutschland von der Kultusministerkonferenz das Ergänzen ($a + x = b$, gefragt ist x) vorgeschrieben. Dieses wird heute üblicherweise mit der Übergangstechnik „Erweitern" kombiniert, d. h. gleichsinniges Verändern wegen der Konstanz der Summe: Ist der Wert der Ziffer im Minuenden kleiner als der der Ziffer im Subtrahenden, werden zum Minuenden zehn der vorliegenden Bündelungseinheit und im Subtrahenden eine der nächst höheren Bündelungseinheit ergänzt. Verschiedene Argumente sprechen gegen dieses Vorgehen. Laut Padberg und Benz (2011) ist die Erklärung der Technik zur Bewältigung des Stellenübergangs für Kinder in Jahrgangsstufe 3 schwer nachvollziehbar. Beim Ergänzen ist ein Kritikpunkt, dass die Verwechslung mit der schriftlichen Addition naheliegt (Padberg & Benz, 2011). Eine weitere Möglichkeit für die Differenzbildung ist das Abziehen, also die Subtraktion ($a – b = x$, gefragt ist x). Beim schriftlichen Verfahren wird diese i. d. R. kombiniert mit der Übergangstechnik „Entbündeln" (ist an der betrachteten Stelle der Wert der Ziffer im Minuenden kleiner als der im Subtrahenden, wird im Minuenden ein Bündel der nächstgrößeren Bündelungseinheit entbündelt und damit die Anzahl der an der aktuellen Stelle vorliegenden Bündelungseinheiten um zehn erhöht). Für das Abziehen spricht u. a., dass diese Grundvorstellung in Sachsituationen anders als das Ergänzen häufig angesprochen wird (Padberg & Benz, 2011). Wohl nicht zuletzt „aufgrund der lebhaften Diskussion *zugunsten* des Abziehverfahrens kombiniert mit der Entbündelungstechnik" (ebd., S. 239) ist die Wahl des Verfahrens seit 1996 von der Kultusministerkonferenz und in der Folge auch in vielen Bundesländern freigestellt.

Heute wird mit der Einführung von schriftlichen Algorithmen nicht mehr nur das Ziel verfolgt, die Schüler/-innen zu effektiven und schnellen Rechnern zu machen. Der Trend geht „to a more thinking approach to match the needs of today's society" (Anghileri 2006). Damit gewinnt auch ein Nachdenken über die sinnhafte Anwendung neben der von Kopfrechen- oder halbschriftlichen Strategien an Bedeutung, z. B. bei Aufgaben wie 701 − 698, bei der Kinder schriftlich rechnen, obwohl die Aufgabe durch Ergänzen im Kopf schneller lösbar ist (ebd., Selter 2001). Algorithmen müssen sich deshalb daran messen lassen, wie gut Kinder sie erklären können. Ein weiteres Kriterium zur Beurteilung des jeweiligen Algorithmus ist die Fehleranfälligkeit. So ist ein Argument gegen das Entbündeln die Fehleranfälligkeit bei mehreren Nullen im Minuenden (Gerster 2012), weil an mehreren Stellen entbündelt werden muss, bevor an der aktuellen Stelle gerechnet werden kann.

Empirische Studien zum Vergleich von Subtraktionsverfahren gibt es bisher nur wenige (Johnson 1938, Brownell & Moser 1949, Mosel-Göbel 1988, Fiori & Zuccheri 2005). Diese haben z. B. aufgrund der weit zurückliegenden Erhebungszeitpunkte in anderen Lehr-/Lernkulturen stattgefunden und beachten z. T. das Verständnis der betrachteten Algorithmen nicht. Hinzu kommt, dass diese Studien untereinander schwierig zu vergleichen sind, weil teilweise unterschiedliche Verfahren verglichen und die untersuchten Aspekte Effektivität und Verständnis unterschiedlich gemessen werden.

Somit ist heute offen, ob Kinder die von ihnen gelernte Übergangstechnik erklären können und ob sich zwischen den genannten Verfahren Unterschiede diesbezüglich und hinsichtlich Fehleranzahlen und/oder verfahrensspezifische Fehlerarten zeigen.

Methoden

Für erste Einsichten wurde eine explorative vergleichende Studie mit Kindern aus 12 vierten Klassen (N=222) durchgeführt (je 6 pro Verfahren, N_E=109, N_A=113). Die Erhebung fand ein Dreivierteljahr nach der Einführung statt, um zu erfassen, welche Fähigkeiten nachhaltig erworben wurden. Das Testinstrument enthielt 15 schriftlich zu rechnende Subtraktionsaufgaben, wovon zwei nicht im Zahlraum der natürlichen Zahlen und damit nicht mit dem Verfahren lösbar waren. Die Aufgaben enthielten typische Fehlerquellen bei der schriftlichen Subtraktion wie (mehrere) Nullen im Minuenden oder gleiche Ziffern in einer Spalte (Gerster 2012, Kühnhold & Padberg, 1998). Mit ihnen sollten Fehlertypen und ihre Häufigkeit untersucht werden. Bei zwei weiteren Aufgaben sollten die Kinder ihr Vorgehen beschreiben und die jeweils übliche Hilfsnotation für die Bewältigung des Übergangs erklären. So sollte ihr Verständnis der jeweils von ihnen gelernten Übergangstechnik geprüft werden. Die 12 Lehrkräfte wurden gebeten, auf einem Fragebogen die Einführung des Verfahrens darzulegen.

Der Vergleich der Anzahlen richtiger Lösungen erfolgte bezogen auf die verschiedenen Aufgabenschwierigkeiten. Die einzelnen Fehler (mehrere pro Aufgabe möglich) wurden nach Fehlertypen kategorisiert. Die Aufgaben zum Verständnis der Übergangstechnik wurden mit qualitativer Inhaltsanalyse ausgewertet und die so gebildeten Kategorien (fehlerhaft, Beschreibung auf mechanischer Ebene, drei Stufen der Genauigkeit z.B. hinsichtlich passender Bündelungseinheiten) quantitativ analysiert.

Ergebnisse

Die Erfolgsquote unterschied sich nicht signifikant zwischen den beiden Gruppen (t(214)=-.522, p=.602). Es gab allerdings spezifische Problemaufgaben: Die Gruppe „Ergänzen mit Erweitern“ war signifikant besser bei Aufgaben mit Nullen im Minuenden und Stellenübergang (6 Aufgaben, t(220)=-2.096, p=.037) und bei Aufgaben mit drei Stellenübergängen (6 Aufgaben, t(220)=-3,232, p=.001). Kinder, die entbündelten, waren signifikant besser bei Aufgaben mit größerem Subtrahenden als Minuenden (t(214)=3,798, p=.000) und Aufgaben ohne Stellenübergang (2 Aufgaben, t(220)=2.210, p=.028). Der Vergleich unter Kontrolle der genutzten Differenzbildung zeigte, dass abziehende Kinder durchschnittlich 0,9 Rechenfehler machten gegenüber 0,45 pro ergänzendem Kind. Die Beschreibung der Übergangstechnik gelang beim Entbündeln deutlich besser: Über die Hälfte der Kinder konnte mindestens Ansätze einer sinnvollen Begründung zeigen und fünf Kinder erklärten vollständig, während der überwiegende Teil der anderen Gruppe das mechanische Abarbeiten des Algorithmus beschrieb und kein Kind vollständig begründete.

Diskussion

Die Studie sollte erste Erkenntnisse bezüglich der Fragen liefern, ob Kinder die von ihnen gelernte Übergangstechnik erklären können und ob sich zwischen den Verfahren „Abziehen mit Entbündeln“ und „Ergänzen mit Erweitern“ Unterschiede diesbezüglich und hinsichtlich Fehleranzahlen und/oder verfahrensspezifische Fehlerarten zeigen. Der Vergleich von Fehlerarten zeigt spezifische Fehlerquellen: Beim Entbündeln bestätigen sich mehrere Nullen im Minuenden als Problem, des Weiteren bereiten mehrere Stellenübergänge Schwierigkeiten. Beim Abziehen werden mehr Rechenfehler gemacht. Allerdings ist unklar, ob die Ursache eine größere Schwierigkeit der Subtraktion gegenüber der Addition ist. Beim Ergänzen mit Erweitern wurden Aufgaben ohne Stellenübergang öfter falsch gelöst. Eine mögliche Ursache ist, dass die erste Aufgabe dazugehörte und vielleicht den Kindern, die mit Erweitern ergänzten, die Erinnerung ans Verfahren schwerer fiel. Außerdem wurden von diesen Kindern deutlich häufiger die nicht lösbaren Aufgaben bearbeitet. Dies lässt vermuten, dass bei diesem Verfahren der Blick für die Zahlen eher verloren geht. Beides hängt mit Verständnisschwierigkeiten des Verfahrens „Ergänzen mit Erweitern“ und infolgedessen einem mechanischen Vorgehen zusammen, welches durch die Daten bekräftigt wird. Insgesamt ist zu beachten, dass sich die Gruppen nicht signifikant in den Lösungsraten des Gesamttests unterscheiden.

Die Ergebnisse der Studie bzgl. der Erklärung der Übergangstechnik scheinen frühere Ergebnisse zu stützen (Mosel-Göbel 1988), dass beim Lernen des Abziehens mit Entbündeln ein besseres konzeptuelles Verständnis erreicht wird als beim Ergänzen mit Erweitern, weil mehr Kinder Ansätze bis vollständige Erklärungen zeigen. Unklar ist, ob die Ursache im Verfahren oder in der Qualität seiner Einführung liegt. Zwar zeigen die Fragebögen, dass bei der Einführung des Entbündelns öfter Material genutzt wurde, dies erklärt aber nicht das Fehlen vollständiger Erklärungen beim Erweitern.

Die Studie bestätigt einzelne Vor- und Nachteile beider Verfahren und liefert so erste Hinweise. Es sind aber vertiefende Studien nötig, die den erfolgten Unterricht stärker in den Blick nehmen.

Literatur

Anghileri, J. (2006). A study of the impact of reform on students' written calculation methods after five years implementation of the National Numeracy Strategy in England. *Oxford Review of Education*, 32(3), 363-380.

Brownell, W. A., & Moser, H. E. (1949). Meaningful vs. mechanical learning: A study in grade III subtraction. Durham, N.C: Duke Univ. Press.Fiori, C., & Zuccheri, L. (2005). An experimental research on error patterns in written subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, 60(3), 323-331.

Gerster, H.-D. (2012). *Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren – Diagnose und Therapie.* Münster: WTM-Verlag.

Johnson, J. Th. (1938). *The relative merits of three methods of subtraction. New* York City: Teachers college, Columbia University.

Kühnhold, K., & Padberg, F. (1986). Über typische Schülerfehler bei der schriftlichen Subtraktion natürlicher Zahlen. *Der Mathematikunterricht,* 3/1986, 6-16.

Kultusministerkonferenz (1958). *Beschluss der Ständigen Konferenz der Kultusminister vom 25.3.1958. Richtlinien und Rahmenpläne für den Mathematikunterricht.*

Mentrup, C. (2016). *Abziehen oder Ergänzen? Eine Auseinandersetzung mit den Verfahren der schriftlichen Subtraktion und die Ergebnisse einer explorativen Studie in Jahrgangsstufe 4.* Unveröffentlichte Masterarbeit, Universität Osnabrück.

Mosel-Göbel, D. (1988). Algorithmusverständnis am Beispiel ausgewählter Verfahren der schriftlichen Subtraktion. Eine Fallstudienanalyse bei Grundschülern. *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe,* 16, 554-559.

Padberg, F., & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik.* Heidelberg: Spektrum.

Selter, C. (2001). Addition and subtraction of three-digit numbers: German elementary children's success, methods and strategies. *Educational Studies in Mathematics* 47(2), 145-173.