

## **Vergleich verschiedener Visualisierungen anhand von Schülerdokumenten bei der Konzeptualisierung von Parametern bei quadratischen Funktionen**

### **Theoretischer Rahmen und Hintergrund zur Studie und Auswertung**

Im Rahmen der hier beschriebenen Studie wird hauptsächlich das speziellere Parameterkonzept untersucht. Dabei nehmen Parameter – ähnlich wie jegliche Variablen - verschiedene Rollen ein. Drijvers (2003) beschreibt vier wichtige Stufen des Lernens des Parameterkonzepts, die durchlaufen werden müssen um ein tragfähiges Verständnis aufzubauen: Parameter als Platzhalter, als generalisierte Zahl, als Veränderliche und als Unbekannte. Drijvers siedelt den Parameter als Platzhalter auf einer niedrigeren Lernstufe an als die Veränderliche und die Unbekannte. Parameter als generalisierte Zahl stellt wiederum eine noch höhere Stufe dar (Drijvers, 2003). Beim Aufbau eines tragfähigen Verständnisses von Parametern – auch hinsichtlich der verschiedenen Stufen - sehen Penglase & Arnold (1996) einen Lernvorteil im Einsatz von Technologien. Bei den unterschiedlichen Wegen, das Thema technologiegestützt zu lehren, gibt es auch häufig Vorschläge, die Schieberegler nutzen. Bezüglich des Einsatzes von Schieberegler gibt es allerdings auch kritische Stimmen, dass der Schieberegler die Erkenntnis eines Zusammenhanges eher verschleiert als fördert (Zbiek et al., 2007).

Im Rahmen einer Interventionsstudie im Kontrollgruppendesign wurden verschiedene Visualisierungen bei der Untersuchung der Bedeutung von Parametern bei quadratischen Funktionen untersucht. Dabei gab es eine Kontrollgruppe und drei Experimentalgruppen. Insgesamt nahmen 316 Schülerinnen und Schülern aus 14 Klassen der Jahrgangsstufe 9 an Gymnasien teil, in denen je ein Pretest und drei 45-minütige Interventionsstunden durchgeführt wurden. Die Aufgabenstellungen erhielten alle auf Papier und sie bestand darin, einem vorstrukturierten Weg zu folgen, um die Bedeutung der Parameter der Scheitelpunktform zu erkunden. Im Laufe der Intervention sollte dadurch ein Merkblatt erstellt werden, auf dem die Schülerinnen und Schüler erklären und begründet sollten, welchen Einfluss die Parameter  $a, b, c$  in der Scheitelpunktform  $f(x) = a \cdot (x - b)^2 + c$  quadratischer Funktionen haben. Bei der Erarbeitung der Aufgaben hatten die Schülerinnen und Schüler in den drei Experimentalgruppen und der Kontrollgruppe jedoch unterschiedliche technische Hilfsmittel zur Verfügung. Die Kontrollgruppe (KG) konnte lediglich mit einem wissenschaftlichen Taschenrechner ohne Graphikfunktion Wertetabellen von Funktionen erstellen. Die Experimentalgruppen hatten iPads mit TI-Nspire CX CAS zur Verfügung und unterschieden sich in den verfügbaren Visualisierungen wie folgt:

- Funktionenplotter (FP)-Gruppe: Die Schülerinnen und Schüler hatten lediglich einen Funktionenplotter ohne jegliche Vorstrukturierung zur Verfügung. Sie konnten nach Belieben Funktionen und Wertetabellen eingeben.
- Zugmodus (ZU)-Gruppe: Die Schülerinnen und Schüler hatten eine vorprogrammierte Datei des TI-Nspire CX CAS zur Verfügung. Es gab einen Graphen, der „angepackt“ werden konnte und sich so Form und Lage der Parabel veränderte. Außerdem wurde der Funktionsterm angezeigt.
- Schieberegler(SR)-Gruppe: Auch hier gab es eine vorgegebene Datei, in der zu jedem Parameter der Scheitelpunktform ein Schieberegler zu finden war, mit Hilfe dessen die Schülerinnen und Schüler die Parameter ändern konnten.

In der ZU- und SR-Datei war zudem eine dynamisch verlinkte Wertetabelle vorhanden (siehe auch Göbel & Barzel, 2016).

Die Pretests, die in der Intervention entstandenen Schülerdokumente sowie Videos von 13 Fokusgruppen stellen die Datengrundlage der Studie. Der Fokus des hier vorliegenden Beitrags liegt auf der Analyse der entstandenen Merkblätter, anhand derer die Schülergruppen ihre Ergebnisse dargestellt haben und auf den Unterschieden, die sich in den Merkblättern der einzelnen Experimental- und Kontrollgruppen identifizieren lassen. Anhand der Merkblätter von zwei Klassen wurde ein Kodiermanual auf Grundlage der qualitativen Inhaltsanalyse entwickelt. Dabei wurden vier Oberkategorien gesetzt (Sprache, Darstellung, Struktur, Inhalt) und aus den zwei zunächst gewählten Klassen induktiv 84 Unterkategorien entwickelt. Im Anschluss daran wurde bei allen Merkblättern jede dieser Unterkategorien kodiert. Die Kodierung wurde von drei Studierenden nach einer eingehenden Schulung durchgeführt. Bei jeder Kodierung wurde zudem zwischen tragfähigen, nicht tragfähigen und nicht vorhandenen Aspekten unterschieden.

### **Analyse der Schülerdokumente**

Die Merkblätter können grob zunächst in zwei Varianten unterteilt werden, Merkblätter die eine Merkblattgestalt haben (57%) und Merkblätter auf denen die Aufgabenstruktur beibehalten wird und lediglich die Aufgaben beantwortet werden (43%).

In einer der 84 Unterkategorien wurde die allgemeine Tragfähigkeit der Aussagen auf den Merkblättern beurteilt. Dabei waren auf 64,9% der Merkblätter hauptsächlich tragfähige Aussagen, auf 33,8% der Merkblätter haupt-

sächlich nicht tragfähige Aussagen (bei 1,3% der Merkblätter nicht entscheidbar). Wenn man sich die unterschiedlichen Experimental- und die Kontrollgruppe einzeln anschaut, fällt auf, dass die ZU-Gruppe zu 89,7% hauptsächlich tragfähige Aussagen trifft. Der Chi-Quadratstest bestätigt hier einen hoch signifikanten Zusammenhang zwischen der Gruppe und Tragfähigkeit der Aussagen ( $p < 0,001$ ).

*Ergebnisse zum Parameter a:* In der ZU- und SR-Gruppe trat eine interessante Auffälligkeit auf, die durch die dynamische Visualisierung bedingt ist. Einige Schülerinnen und Schüler in diesen beiden Gruppen (ZU 15%, SR 16,8%) stießen, eventuell durch die Dynamik, auf den Sonderfall  $a=0$  und erkannten, dass Funktion für  $a=0$  eine Gerade liefert, was ein Schüler sogar markant beschrieb als: „a entscheidet, ob es eine Parabel ist!“. Dennoch waren die beschriebene Bedeutung korrekt.

Der Eindruck, dass die ZU-Gruppe die größte Anzahl an tragfähigen Aussagen trifft, bestätigt sich auch bei der Betrachtung von Streckung und Stauchung der Parabel. Allgemein wurde die Streckung der Parabel häufiger erkannt als die Stauchung, in beiden Fällen wurde dies am häufigsten in der ZU-Gruppe erkannt und begründet.

Anders sieht es beim Erkennen und Begründung der Öffnung der Parabel aus. Dies wurde am häufigsten in der SR-Gruppe erkannt (54,1%) und begründet (33%). Die Öffnung der Parabel erkennen nur 38,8% der Schülerinnen und Schüler der ZU-Gruppe und damit nur am dritthäufigsten. Jedoch begründen fast alle Schülerinnen und Schüler der ZU-Gruppe die die Öffnung erkannt haben diese auch korrekt.

*Ergebnisse zum Parameter b:* Auch beim Parameter b waren im Allgemeinen die ZU- und SR-Gruppe besser als die FP- und KG-Gruppe. Lediglich beim tragfähigen Begründen der Verschiebung nach Links bzw. Rechts war die KG-Gruppe und beim tragfähigen Begründen der allgemeinen Verschiebung an der x-Achse die FP-Gruppe besser.

*Ergebnisse zum Parameter c:* Erstaunlich ist, dass im allgemeinen weniger Schülerinnen und Schüler die Eigenschaften von Parameter c erkennen und begründen als dies bei den anderen beiden Parametern der Fall ist, obwohl auf dem Aufgabenblatt Parameter c als erstes untersucht werden sollte. Jedoch sind beim Parameter c die Unterschiede zwischen den Gruppen nicht so groß, so erkennen zum Beispiel 41,3% der KG-Gruppe, 24,1% der FP-Gruppe, 38,8% der ZU-Gruppe und 42,5% der SR-Gruppe eine Verschiebung des Graphen nach oben.

## Diskussion und Ausblick

Auffällig ist, dass die ZU- und SR-Gruppe auch in den hier nicht vorgestellten Kategorien im Vorteil gegenüber der KG-Gruppe und der FP-Gruppe sind. Dies widerspricht der Annahme von Zbiek et al. (2007), dass Schieberegler den Zusammenhang zwischen der Veränderung des Parameters und der Veränderung des Graphen aufgrund der zu schnellen Dynamik verschleiern.

Dies kann an der Vorstrukturierung der Lernumgebung liegen, da diese Vorstrukturierung den Schülerinnen und Schülern vielleicht die Erkenntnis mit Hilfe dynamischer Visualisierungen erleichtert. Durch die verschiedenen dynamischen Visualisierungen könnte immer eine Art von Parameter nach Drijvers (2003) stärker in den Fokus rücken und damit können eventuell einige der Unterschiede in den Ergebnissen der einzelnen Gruppen begründet werden. Allerdings würde dies bedeuten, dass die Schritte beim Lernen nicht notwendigerweise in der von Drijvers (2003) vorgeschlagene Reihenfolge durchlaufen werden müssen. Im Folgenden soll im Promotionsprojekt in einigen ausgewählten Kategorien noch eine tiefergehende qualitative Analyse der Schülerdokumente stattfinden. Neben den Schülerdokumenten wurden auch noch Videodaten erhoben, im Laufe des Projektes sollen die Auswertungen der Videos und Schülerdokumente verknüpft werden um ein umfassenderes Bild der Vor- und Nachteile der verschiedenen Visualisierungen zu bekommen. Auch soll untersucht werden, ob und wie stark Klassen- bzw. Lehrerunterschiede trotz der parallelisiert stattfindenden Intervention auftreten.

## Literatur

- Drijvers, P. H. M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter*. Utrecht: Freudenthal Institute.
- Göbel, L. & Barzel, B. (2016). Vergleich verschiedener dynamischer Visualisierungen zur Konzeptualisierung von Parametern bei quadratischen Funktionen. *Beiträge zum Mathematikunterricht*.
- Penglase, M. & Arnold, S. (1996). The graphics calculator in mathematics education: a critical review of recent research. *Mathematics Education Research Journal* 8(1), 58–90.
- Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on Technology in Mathematics Education – A Perspective of Constructs. In F. Lester (Hrsg.): *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Charlotte, NC: Information Age, 1169-1207.