

Problemlösen im Bereich der frühen Algebra

In einer kürzlich von mir durchgeführten Interviewstudie mit Kindern einer vierten und fünften Jahrgangsstufe zum Umgehen mit Unbekannten wurden von mir mathematische Probleme mit ein oder mehreren Unbekannten eingesetzt. Die Bearbeitung dieser Problemstellungen fällt Kindern nicht nur wegen des Umgehens mit Unbekannten schwer, sondern auch weil ihnen wenig Strategien zur Verfügung stehen. Wenn SuS dennoch erfolgreich die Aufgaben lösten, nutzten sie die heuristische Strategie des systematischen Probierens. Diese Strategie erweist sich als kognitiv sehr anspruchsvoll. Ein erfahrener „Problemlöser“ würde den Werkzeugkoffer des Problemlösens öffnen und zu algebraischen Mitteln greifen. „Die Möglichkeit, mit Variablen Sachverhalte allgemein darzustellen, lässt sich einsetzen zu allgemeinem Problemlösen ...“ (Malle, 1993, S. 10). Kinder im Grundschulalter müssen nach Strategien suchen. Beim Einsatz von Aufgaben die sowohl arithmetisch als auch algebraisch bearbeitet werden können, haben wir die Chance algebraische Kompetenzen der SuS zu identifizieren. Darauf habe ich mich in meiner Forschung zum algebraischen Denken von Grundschulkindern konzentriert. Im Folgenden möchte ich einen knappen Einblick geben (ausführlich dazu Karpinski-Siebold, 2016).

Algebra und algebraisches Denken

Ein bedeutendes Teilgebiet der Fachwissenschaft Mathematik und des Mathematikunterrichts ist die Algebra. Algebra wird unter anderem beschrieben als Werkzeug zur Repräsentation und Analyse quantitativer Beziehungen, als Fachsprache, die das Modellieren sowie Formulieren und Beweisen ermöglicht (Ball, 2003). Schwerwiegend sind demzufolge vielfältige Schwierigkeiten von SuS mit algebraischen Inhalten, die sich in zahlreichen Vergleichsstudien und größeren Untersuchungen immer wieder zeigen (u.a. Carraher & Schliemann, 2007; Kieran, 2007). Als wesentliche Ursache der vielfältigen Schwierigkeiten gelten die Diskontinuitäten zwischen Arithmetik und Algebra. Der Bruch beim Übergang von der Arithmetik zur Algebra wird beispielsweise von Herscovics & Linchevski (1994) als „cognitive gap“ und bei Filloy & Rojano (1989) als „didactic cut“ bezeichnet. Darüber hinaus beschreibt u.a. Malle (1993) an vielen Beispielen die Veränderung der Bedeutung von Zeichen und Schreibweisen, der Sichtweise auf Terme und Formeln sowie der heuristischen Aktivitäten im Übergang von Arithmetik zur Algebra als Ursache für Missverständnisse. Um Schwierigkeiten von SuS zu reduzieren, die sie mit der Algebra offensichtlich haben, gibt es unterschiedliche Ansätze. So könnte man sich um einen früheren leichteren

Einstieg in die Algebra in dem Sinne bemühen, indem man an die umfangreichen Erfahrungen der SuS bezüglich des Arithmetikunterrichts Anknüpfung findet und so einen leichteren Übergang zwischen Arithmetik und Algebra entstehen lässt, Pre-Algebra. Ein weiterer Ansatz ist das Verbinden von arithmetischen und algebraischen Perspektiven zur Entwicklung des algebraischen Denkens. Für die weitere Ausarbeitung beider Ansätze scheint es jedoch wichtig, die Entstehung des algebraischen Denkens bei jüngeren Schulkindern zu untersuchen. Daraus ergibt sich meine erste Forschungsfrage:

1. Wie kann algebraisches Denken im Grundschulalter theoretisch beschrieben werden?

Ausgehend von der breit geführten Diskussion zum algebraischen Denken wird das Konstrukt algebraisches Denken mit folgenden sechs Komponenten umrissen:

Umgehen mit Operationen als Objekten und ihren Umkehrungen; Herstellen von Beziehungen zwischen Zahlen, Mengen und Relationen; Verallgemeinern; Umgehen mit Unbekannten; Umgehen mit Veränderungen; Nutzen von (symbolischen) Repräsentationen

Diese Komponenten sind nicht auf Algebra beschränkt, sie erfahren in algebraischen Konstellationen allerdings eine spezifische Ausprägung. Mit ihnen erscheint algebraisches Denken als ein sehr reichhaltiges spezifisches Konstrukt, wobei nicht alle Komponenten trennscharf voneinander sind (ausführlich dazu Fritzlär & Karpinski-Siebold, 2011).

Aus der oben aufgeführten ersten Forschungsfrage und deren theoretische Beantwortung resultiert die folgende zweite Forschungsfrage:

2. Welche Fähigkeiten bezüglich des algebraischen Denkens sind bei Lernenden im vierten Schuljahr ohne vorherige spezifische Programme zu erfassen?

Einblicke in die empirische Untersuchung

In 45-minütigen halbstandartisierten Interviews bearbeiteten 78 SuS neun Aufgaben mit Subaufgaben, deren Passung zu den Komponenten algebraischen Denkens schon in der Vorstudie erprobt wurde. Zu einer Komponente wurden zum Teil mehrere Aufgaben konstruiert. Die Probanden wurden bezüglich des Leistungsspektrums ausgewählt (siehe Tabelle 1).

<i>Schülergruppe</i>	<i>Beschreibung</i>
Schülergruppe A	mathematisch begabte SuS
Schülergruppe B	SuS mit sehr guten Leistungen in Mathematik

Schülergruppe C	SuS mit durchschnittlichen Leistungen in Mathematik
Schülergruppe D	SuS mit Leistungen, die unter dem Durchschnitt liegen

Tabelle 1: Leistungsspektrum der Probanden

Auswertung der Daten und ausgewählte Ergebnisse

Die Auswertung der Daten soll u. a. begründete Aussagen darüber treffen, ob und inwieweit SuS beim Bearbeiten der Aufgaben algebraisch vorgehen bzw. inwieweit algebraische Denkprozesse zu identifizieren sind. Deshalb wurde ein aufgabenspezifisches Kategoriensystem entwickelt, welches zunächst das Vorgehen der Probanden beschreibt. Diese Kategorien wurden anschließend bezüglich der Fragestellung interpretiert, das heißt inwieweit ist die Bearbeitung algebraisch, teilweise algebraisch bzw. nicht algebraisch zu werten. Alle Bearbeitungsweisen der SuS bezüglich jeder Aufgabe wurden zunächst komponentenbezogen ausgewertet und anschließend zusammengeführt. Das folgende Diagramm 1 zeigt alle Vorgehensweisen der einzelnen Probanden, die als algebraisch interpretiert wurden. Es wird deutlich, dass algebraisches Denken bezüglich der Komponenten unterschiedlich ausgeprägt ist. Auch innerhalb einer Komponente gibt es Unterschiede.

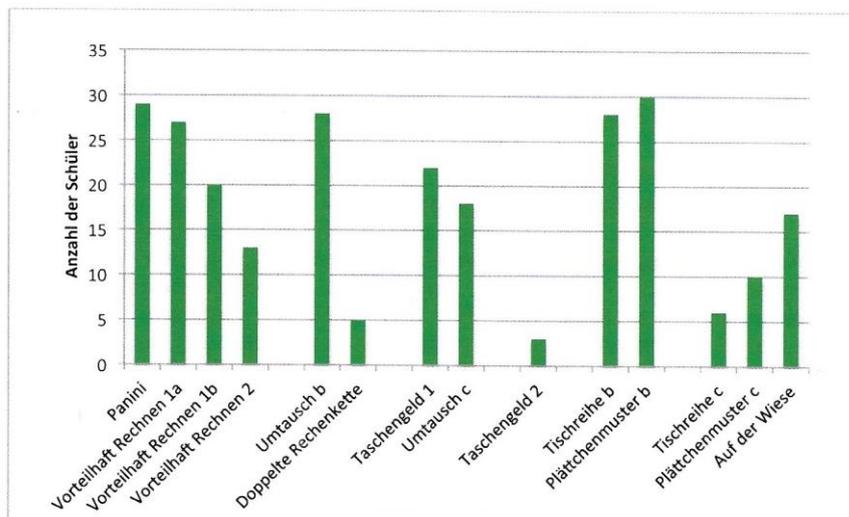


Diagramm 1: algebraisches Vorgehen aller SuS

Das Diagramm 2 zeigt zusammenfassend die algebraische Bearbeitung über alle Aufgaben in prozentualer Verteilung der Probanden im Leistungsspektrum. Die zu erwartenden Unterschiede zwischen den Schülergruppen werden deutlich. In der Zusammenfassung der Vorgehensweisen der Probanden zeigt sich, dass bei mathematisch begabten SuS (A) die Bearbeitung vermehrt algebraisch ist, im Vergleich zu den anderen Schülergruppen. Der Unterschied zwischen der Schülergruppe A und B ist auffallend groß. Diese

Befunde bekräftigen die Hypothese nach einem Zusammenhang der Konstrukte „mathematische Begabung“ und „algebraischen Denken“.

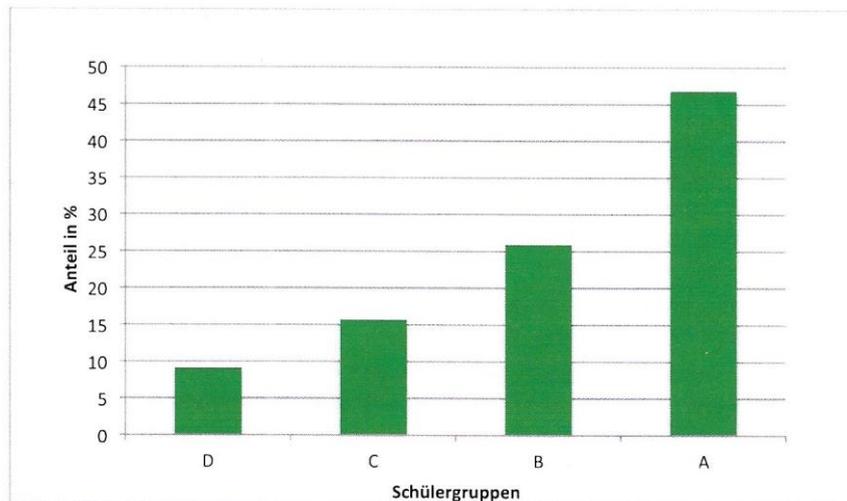


Diagramm 2: algebraische Bearbeitungen im Leistungsspektrum

In Bezug auf das algebraische Denken kann das Problemlösen als eine wichtige Möglichkeit zur Entwicklung diesbezüglicher Fähigkeiten angesehen werden.

Literatur

- Ball, D. L. (2003). *Mathematical proficiency for all students: Toward a strategic research and development program in mathematics education*. Santa Monica, CA: RAND.
- Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669–705). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19–25.
- Fritzlar, T. & Karpinski-Siebold, N. (2011). Algebraic thinking of primary students. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 345-352). Ankara: PME.
- Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 59–78.
- Karpinski-Siebold, N. (2016). *Algebraisches Denken im Grundschulalter*. Münster: WTM-Verlag
- Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School through College Levels. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707–762). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Malle, Günther; Bürger, Heinrich; Wittmann, Erich Ch (1993): *Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Mit vielen Beispielaufgaben*. Braunschweig [u.a.]: Vieweg