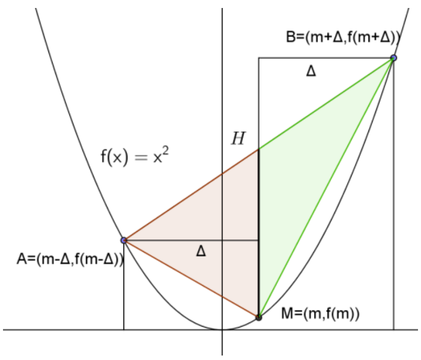
Christoph KIRFEL, University of Bergen, NO

Generalisierung der Archimedischen Methode zur Flächenbestimmung des Parabelsegments

Bereits im dritten vorchristlichen Jahrhundert entwickelte Archimedes (geboren um 287 v. Chr., gestorben 212 v. Chr), eine Methode zur Flächenbestimmung eines Parabelsegments, eine Problemstellung die erst im 16. und 17. Jahrhundert wieder aufgegriffen und weiterentwickelt wurde. Hier sind bereits viele Ideen der Infinitesimalrechnung vorhanden, die erst fast 2000 später exakt gefasst wurden. In diesem Beitrag möchten wir zeigen, wie Archimedes Methode mit überraschend einfachen Mitteln auf Potenzfunktionen höherer Ordnung übertragen werden kann. Archimedes Argumente können ohne weitere Anpassung verwendet werden.



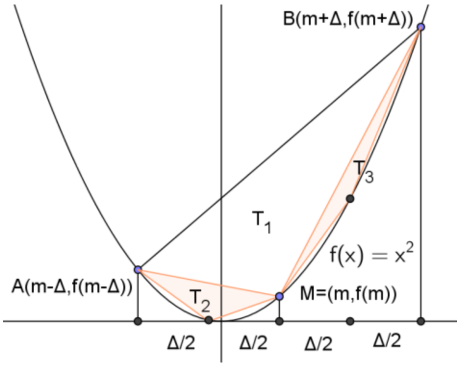
Archimedes Vorhaben war es den Flächeninhalt eines Parabelsegments, das von einer Parabel und einer Sekante *AB* eingeschlossen wird, zu berechnen. Dazu interessierte er sich zunächst einmal für den Flächeninhalt T_1 des Dreiecks *ABM*, wobei *M* «auf halber Strecke» zwischen *A* und *B* auf der Parabel liegt. Der *x*-Wert von *M* ist also der Durchschnitt der *x*-Werte von *A* und *B*. In unserer Darstellung gehen wir von $M=(m,f(m))$ aus und erhalten dann $A=(m-\Delta,f(m-\Delta))$ und $B=(m+\Delta,f(m+\Delta))$. Nennen wir *H* den Mittelpunkt der Strecke *AB*, so können wir das Dreieck *ABM* in zwei kleinere Dreiecke *AMH* und *BMH* teilen, die dieselbe Grundlinie *MH* und dieselbe Höhe Δ haben. Nun ist $|MH|=\frac{f(m+\Delta)+f(m-\Delta)}{2}-f(m)$ und wir erhalten: $T_1=\Delta\left(\frac{f(m+\Delta)+f(m-\Delta)}{2}-f(m)\right)$.

Die Parabel

Im Falle der Parabel schreiben wir $f(x)=x^2$ und erhalten

$$T_1=\Delta\left(\frac{f(m+\Delta)+f(m-\Delta)}{2}-f(m)\right)=\Delta\left(\frac{m^2+2m\Delta+\Delta^2+m^2-2m\Delta+\Delta^2}{2}-m^2\right)=\Delta^3.$$

Der Flächeninhalt T_1 des Dreiecks hängt nur vom halben Abstand Δ zwischen *A* und *B* ab (in *x*-Richtung) und nicht davon, wo der Zwischenpunkt *M* oder die Endpunkte *A* und *B* auf der Parabel liegen.



Archimedes geniale Idee war es nun ein neues Dreieck T_2 zwischen *A* und *M* einzufügen. Wieder wurde der dritte Punkt halbwegs (in *x*-Richtung) zwischen die beiden anderen *A* und *M* gesetzt. Dasselbe geschah zwischen *M* und *B*. Dieses Dreieck nennen wir T_3. Weil nun der Abstand der "Endpunkte" der neuen Dreiecke gerade mal die Hälfte des ursprünglichen Abstandes ist (in *x*-Richtung) können wir die neuen Flächeninhalte leicht angeben:

$$T_2 = T_3 = \left(\frac{\Delta}{2}\right)^3 = \frac{\Delta^3}{8}, \text{ also } T_2 + T_3 = \frac{\Delta^3}{4} = \frac{T_1}{4}.$$

Danach fügte Archimedes immer kleiner werdende Dreiecke ein, um immer mehr vom Parabelsegment abzudecken. In moderner Terminologie hieße das, wir bekommen eine unendliche Reihe für den Inhalt *P* des Parabelsegments:

$$P = T_1 + (T_2 + T_3) + (T_4 + T_5 + T_6 + T_7) + (T_8 + T_9 + T_{10} + T_{11} + T_{12} + T_{13} + T_{14} + T_{15}) + \ldots =$$

$$= T_1 + \left(\frac{T_1}{4}\right) + \left(\frac{T_2}{4} + \frac{T_3}{4}\right) + \left(\frac{T_4}{4} + \frac{T_5}{4} + \frac{T_6}{4} + \frac{T_7}{4}\right) + \ldots = T_1 + \frac{P}{4},$$

also $\frac{3P}{4} = T_1$ und $P = \frac{4}{3}T_1 = \frac{4\Delta^3}{3}$.

Damit hatte er den Flächeninhalt des Parabelsegments gefunden. Dieser ist gerade vier Drittel des Flächeninhaltes des anfänglichen Dreiecks.

Unsere Idee ist es nun die obige Argumentation auf Potenzfunktionen höheren Grades zu übertragen.

Die dritte Potenz

Wir setzen nun $f(x) = x^3$. Die Formel für den Flächeninhalt des anfänglichen Dreiecks gibt uns hier: $T_1 = \Delta\left(\frac{f(m+\Delta)+f(m-\Delta)}{2} - f(m)\right) =$

$$\Delta\left(\frac{m^3 + 3m^2\Delta + 3m\Delta^2 + \Delta^3 + m^3 - 3m^2\Delta + 3m\Delta^2 - \Delta^3}{2} - m^3\right) = 3m\Delta^3.$$

Hier ist der Flächeninhalt also auch von der Lage von *A* und *B* (und natürlich auch *M*) abhängig und nicht nur vom halben Abstand Δ der Endpunkte. Berechnen wir die Flächeninhalte in der nächsten Generation, so erhalten wir

$T_2 = 3\left(m - \frac{\Delta}{2}\right)\left(\frac{\Delta}{2}\right)^3$ und $T_3 = 3\left(m + \frac{\Delta}{2}\right)\left(\frac{\Delta}{2}\right)^3$. Diese Ergebnisse sind verschieden, weil die zugehörigen Zwischenpunkte an verschiedenen Orten liegen. Aber wir haben noch einmal Glück. Nur die Summe der beiden Flächeninhalte interessiert hier und diese beläuft sich auf:

$T_2 + T_3 = 3\left(m - \frac{\Delta}{2}\right)\left(\frac{\Delta}{2}\right)^3 + 3\left(m + \frac{\Delta}{2}\right)\left(\frac{\Delta}{2}\right)^3 = \frac{3m\Delta^3}{4} = \frac{T_1}{4}$ und wir befinden uns in der gleichen Situation, wie im Fall der Parabel. Der Flächeninhalt der Dreiecke der neuen Generation ist ein Viertel des Flächeninhaltes der alten Generation. Nennen wir *D* den Flächeninhalt des Kurvensegments dritten Grades so erhalten wir auch hier: $D = \frac{4}{3}T_1 = 4m\Delta^3$ und es ist uns gelungen, den Flächeninhalt des Segments der Kurve dritten Grades zu berechnen.

Ein Vergleich mit dem, was uns die Integralrechnung liefert, zeigt, dass unsere Archimedisch inspirierten Berechnungen korrekt sind.

Die vierte Potenz

Für die vierte Potenz $f(x) = x^4$ erhalten wir mit der obigen Formel

$$T_1 = \Delta\left(\frac{f(m+\Delta) + f(m-\Delta)}{2} - f(m)\right) =$$

$$\Delta\left(\frac{m^4 + 4m^3\Delta + 6m^2\Delta^2 + 4m\Delta^3 + \Delta^4 + m^4 - 4m^3\Delta + 6m^2\Delta^2 - 4m\Delta^3 + \Delta^4}{2} - m^4\right) =$$

$$\Delta^3(6m^2 + \Delta^2)$$

Hier ist der Flächeninhalt wieder von *m*, der Lage des Zwischenpunktes abhängig. Berechnen wir die Flächeninhalte der nächsten Generation T_2 und T_3, so erhalten wir

$$T_2 = \left(\frac{\Delta}{2}\right)^3\left(6\left(m - \frac{\Delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2\right) \text{und } T_3 = \left(\frac{\Delta}{2}\right)^3\left(6\left(m + \frac{\Delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2\right).$$

Nach einigen Umformungen ergibt sich für die Summe: $T_2 + T_3 = \frac{T_1}{4} + \frac{3\Delta^5}{16}$

Hier erhalten wir also einen zusätzlichen Term $3\Delta^5/16$ verglichen mit den vorherigen Ergebnissen für die Parabel und die dritte Potenz. Wir sehen aber bereits jetzt schon, dass sowohl der Term $T_1/4$ als auch der Term $3\Delta^5/16$ zu jeweils einer geometrischen Reihe führen, die wir (genau wie Archimedes) beherrschen. Es sei *V* der Flächeninhalt des Segments der Kurve vierten Grades. Dann können wir schreiben:

$$V = T_1 + (T_2 + T_3) + (T_4 + T_5 + T_6 + T_7) + (T_8 + T_9 + T_{10} + T_{11} + T_{12} + T_{13} + T_{14} + T_{15}) + \ldots =$$

$$= T_1 + \left(\frac{T_1}{4} + \frac{3}{16}\Delta^5\right) + \left(\frac{T_2}{4} + \frac{3}{16}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^5 + \frac{T_3}{4} + \frac{3}{16}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^5\right) +$$

$$\left(\frac{T_4}{4} + \frac{3}{16}\left(\frac{\Delta}{4}\right)^5 + \frac{T_5}{4} + \frac{3}{16}\left(\frac{\Delta}{4}\right)^5 + \frac{T_6}{4} + \frac{3}{16}\left(\frac{\Delta}{4}\right)^5 + \frac{T_7}{4} + \frac{3}{16}\left(\frac{\Delta}{4}\right)^5\right) + \ldots$$

$$= T_1 + \frac{V}{4} + \frac{3\Delta^5}{16}\left(1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 4\left(\frac{1}{4}\right)^5 + \ldots\right) = T_1 + \frac{V}{4} + \frac{3\Delta^5}{16} Z$$

Hier ist $Z = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 4\left(\frac{1}{4}\right)^5 + \ldots = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \ldots = 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16^2} + \ldots = \frac{16}{15}$ eine geometrische Reihe.

Damit ist $V = T_1 + \frac{V}{4} + \frac{\Delta^5}{5}$, was uns zu $V = \frac{4}{3}\left(T_1 + \frac{\Delta^5}{5}\right) = \frac{8\Delta^3(5m^2 + \Delta^2)}{5}$ führt.

Auch hier kann man sich schnell davon überzeugen, dass das Resultat damit übereinstimmt, was uns die Integralrechnung liefert.

Für höhere Potenzen kann man so weiter fortfahren und entsprechende Ergebnisse erzielen. Die Argumentation wird verständlicherweise komplizierter, reduziert sich aber immer auf das Rechnen mit geometrischen Reihen.

Abschluss: Die gefundenen Resultate sind eigentlich nur untere Schranken für die Flächeninhalte der Segmente. Streng genommen muss man auch noch obere Schranken angeben und zeigen, dass diese mit den unteren übereinstimmen. Diese Argumente findet man in Kirfel [1].

Archimedes hatte kein Koordinatensystem, er kannte keinen Funktionsbegriff und hätte nur schwerlich mit vierten Potenzen arbeiten können, da mathematische Terme für ihn Längen, Strecken oder Volumina bedeuteten. Auch war seine Beschreibung der Parabel rein geometrisch. Trotzdem enthält sein Ansatz ein Potential, das wir heute noch ausnutzen und verallgemeinern können. Das spricht für die Tiefe seiner Erkenntnisse.

Die vorgestellte Herangehensweise kann mit Vorteil in der Lehrerbildung zur Anwendung kommen. Auf diese Weise kann man verschiedene Zugänge zur Integration vergleichen und auch didaktische Implikationen diskutieren.

Literatur

Kirfel, C. (2014). Integration by Geometrical Means – A Unified Approach. *Mathematics Teaching* 239, 23 – 25.