Sebastian KOLLHOFF, Universität Bielefeld, DE

Analyse und Rekonstruktion von Transferprozessen in Schülerinteraktionen

Begriffliche Bestimmung: Transferleistung – Transferprozess

Die Entwicklung des Bruchzahlbegriffs ist ein schwieriger Prozess, der konzeptuelle Erweiterungen von elementaren Zahl- und Operationsvorstellungen erfordert. Es bedarf eines sukzessiven Aufbaus von Grundvorstellungen, die im Verlauf der fortschreitenden Begriffsbildung erweitert, miteinander vernetzt, neu strukturiert und zum Teil auch korrigiert werden müssen. In einer Vielzahl empirischer Studien (z.B. Wartha 2007) werden wesentliche Hürden und Schwierigkeiten in der Begriffsbildung über ausbleibenden Transfer in Bezug auf die Erweiterung von Grundvorstellungen sowie die Entwicklung von Fehlvorstellungen durch fälschliche Übertragungen von Struktureigenschaften der natürlichen Zahlen erklärt.

Die erhobenen Schwierigkeiten in der Entwicklung von elementaren Bruchzahlvorstellungen werden zumeist rein resultativ als Produkt vorangehender Lernprozesse in Leistungstests erhoben. Obgleich in der Literatur eine Vielfalt an Zusammenstellungen empirisch erhobener Fehlermuster (z.B. Eichelmann et al. 2012) vorliegt, weiß man noch wenig über die detaillierten Verläufe dieser Begriffsbildungsprozesse, insbesondere hinsichtlich der sukzessiven Erweiterung von Vorwissensstrukturen, die als kritische Punkte in der Begriffsbildung identifiziert werden.

In der diesem Beitrag zugrundeliegenden Studie (Kollhoff 2015, 2016) werden genau diese Übertragungsprozesse in der Entwicklung elementarer Bruchzahlvorstellungen im Detail untersucht. Entgegen des in der psychometrischen Leistungsmessung vorherrschenden produktbezogenen Transferbegriffs einer abgeschlossenen *Transferleistung* als Ergebnis eines Lernprozesses wird in dieser Studie ein prozessorientierter Transferbegriff angewendet, der *Transferprozesse* als die Prozesse der Übertragung auf ein neues Anwendungsgebiet beschreibt, wobei die Art der übertragenen Wissensstruktur sowie der Ursprung und das Ziel der Übertragung eindeutig identifizierbar sind. Die zentralen Fragen der Studie sind dabei: (1) Welche Transferprozesse lassen sich normativ in der Entwicklung von tragfähigen Bruchzahlvorstellungen identifizieren? (2) Wie bilden sich die normativ intendierten Transferprozesse in den individuellen Lernprozessen der Schülerinnen und Schüler ab? (3) Welche Rolle nehmen Transferprozesse in der Entwicklung von Grundvorstellungen und in der Begriffsbildung ein?

Transferprozesse in der Entwicklung des relativen Anteilbegriffs

Im Kern in der Entwicklung eines tragfähigen Bruchzahlkonzepts steht u.a. der Transferprozess von einem Verständnis von einem Bruch als Teil eines gegenständlichen Ganzen zu einem Verständnis von Bruchzahlen, das die Deutung und den Umgang mit Bruchzahlen ohne eine Bezugsgröße ermöglicht. Dieser Prozess kann normativ durch eine Reihe von untergeordneten Teilschritten beschrieben werden. Einer dieser Teilschritte ist die Reversibilität (vgl. Ramful 2014) der Bruchherstellung. Die Schüler haben gelernt zunächst Stammbrüche durch Zerlegen eines Ganzen in gleich große Teile herzustellen und diese zu vervielfachen. Die Inversion dieser Bruchherstellung bzw. der Rückschluss von einem vorgegebenen Teil auf das Ganze kann aus zwei Perspektiven vorgenommen werden. Aus einer statisch-ikonischen Ebene kann auf Grundlage einer ikonischen Repräsentation des Anteils der fehlende Teil zum Ganzen erschlossen werden oder auf einer statisch-symbolischen Ebene die Differenz zwischen Zähler und Nenner bestimmt werden.

Fallbeispiel: L und M und der Rückschluss auf das Ganze

Der folgende Ausschnitt entstammt aus einer Lernsituation aus dem Unterricht einer fünften Klasse im Anschluss an die unterrichtliche Einführung von Stammbrüchen und ihrer ikonischen Darstellung. Anhand von Kreis- und Rechteck-Repräsentationen erarbeiten die Schüler in der vorliegenden Sitzung in Partnerarbeit die Herstellung von echten Brüchen, indem sie Stammbrüche vervielfachen. Der folgende Transkriptausschnitt ist ein Auszug aus ihrer Bearbeitung einer Transferaufgabe, in der sie zu den symbolisch angegebenen Brüchen $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$ und $\frac{7}{25}$ den Anteil nennen sollten, der noch zu einem Ganzen fehlt. Als Hilfe wird den Schülern angeboten, dass sie auch zeichnen können.

1 M: [lacht] Wir können auch zeichnen. Nein, ich zeichne nicht. Hä? Wie viel fehlt zu einem Ganzen. Geteilt durch 4, böah! 4 geteilt durch 4 gleich 0, böah. Gleich 1, 1 Eintel. 1 Einstel … 1 Viertel …
2 L: [zur Lehrkraft] Aber von welchem Ganzen? Zu welchem Ganzen?
3 LK: Wie viel fehlt von einem Viertel bis zu einem Ganzen?
4 L: Ja, aber wie wissen wir denn wie groß ein Ganzes ist?
5 LK: Du kannst dir ja zum Beispiel mal ein Viertel aufzeichnen und gucken wie das aussieht.
6 M: Rechteck oder Kreis?
7 LK: Das könnt ihr euch aussuchen.
[Ablenkung]

Nachdem M die Aufgabenstellung gelesen hat, lehnt er sofort ab zu zeichnen und versucht die Anteilherstellung von einem Viertel zu beschreiben (1). Dabei nimmt er als Ausgangpunkt jedoch nicht 1, sondern 4. Er teilt 4 durch 4 und ist schließlich irritiert, dass diese Rechenoperation nicht zu einem Viertel führt. Es ist zudem anzunehmen, dass er die Aufgabenstellung nicht wie angedacht verstanden hat. L sucht Hilfe bei der Lehrkraft und fragt, zu welchem Ganzen noch etwas fehlt (2). Zusammen mit seiner Frage, wie man denn wissen könne, wie groß das Ganze sei (4) wird deutlich, dass Ls Vorstellungen von einem Anteil sehr stark an eine konkrete Größe gebunden sind. Die Lehrkraft schlägt in der Folge vor, dass sie den Bruch zunächst einmal zeichnen und sich die Situation bildlich vergegenwärtigen sollen. Obgleich beide Schüler zuvor eine bedeutende Anzahl an Brüchen in Kreis- und Rechteck-Repräsentationen gezeichnet haben, scheint M noch nicht eingesehen zu haben, dass die Form, in der das Ganze repräsentiert wird, nicht von Bedeutung ist (6).

8 LK: Kann ich euch helfen?
9 L: Nein.
10 M: Doch, wie soll man das denn bildlich darstellen, 1 Viertel?
11 LK: Wie habt ihr das denn bisher gemacht?
12 L: Es fehlen eh nur drei Viertel.
13 LK: Achso, woher weißt du das?
14 L: Keine Ahnung, das hab’ ich jetzt einfach nur so gesagt.
15 M: Wieso denn drei Viertel?
16 L: Warum nicht? [zeichnet] Wir haben hier schon 1 Viertel.
Und jetzt fehlen uns noch drei Viertel.
17 M: Warum denn drei?

Im weiteren Verlauf wird deutlich, dass M weitaus grundlegende Schwierigkeiten zu haben scheint. In Zeile 10 fragt er die Lehrkraft, wie man den Bruch ein Viertel bildlich darstellt. Während die Lehrkraft darauf eingeht und ihn fragt, wie sie das in den vergangenen Stunden gemacht haben wirft L ein, dass zu einem Viertel noch drei Viertel zu einem Ganzen fehlen. Auf die Frage der Lehrkraft nach einer Begründung gibt er zunächst lediglich an es nicht zu wissen und „einfach nur so gesagt“ zu haben. L scheint intuitiv zu vermuten, dass dies die korrekte Antwort ist und beginnt eine Darstellung von einem Viertel in einem Rechteck anzufertigen. M ist von dieser Antwort nicht überzeugt. Anhand seiner Zeichnung begründet L dann, dass bereits ein Viertel als ein Teil von insgesamt vier vorhanden ist und somit noch drei weitere Teile zu einem Ganzen fehlen. Auch diese Begründung anhand einer Zeichnung überzeugt M nicht.

L geht daraufhin nicht weiter auf Ms Hilfesuche ein und bearbeitet allein die weiteren Teilaufgaben. M schreibt ab.

18 L: [schreibt die Brüche ergänzenden Brüche zu $\frac{5}{8}$ und $\frac{7}{12}$ auf]
19 M: [schreibt ab]
20 L: [bei d) $\frac{7}{25}$] Und da fehlen noch ... dreizehn ...
21 M: Dreizehn was?
22 L: Das muss fünfundzwanzig und fünfundzwanzig, dann ist es voll. Also, drei, zehn, achtzehn fünfundzwanzigstel, fertig.
23 M: [schüttelt den Kopf] Nein! Das kann ja gar nicht sein, dass diese Zahl mehr ist als die andere.

In Zeile 22 gibt L dann eine weitere Begründung für sein Vorgehen an und beschreibt, dass $\frac{25}{25}$ „voll" ist – entsprechend einer Vorstellung vom numerischen Auffüllen.

In Ls Bearbeitung der Aufgabe lässt sich eine klare Entwicklung erkennen. Mit einer intuitiven Annahme startend zeichnet er eine Darstellung für den Bruch $\frac{1}{4}$ und bestätigt damit seine Vermutung. Hieraus leitet er den numerischen Zusammenhang ab, dass das Ganze dem allgemeinen Bruch $\frac{n}{n}$ entspricht und entwickelt daraus eine Vorstellung vom Auffüllen, die es ihm ermöglicht rechnerisch die weiteren gesuchten Ergänzungen zum Ganzen zu finden. Im Gegensatz zu L hat M bereits Schwierigkeiten mit der Visualisierung von einem Viertel und kann L nicht folgen.

In dieser exemplarischen Sequenz wird deutlich, dass Transferprozesse als integrale Bestandteile von Lernprozessen und der Begriffsbildung betrachtet werden können. Sie hängen von der Ausprägung, Vernetzung und Tragfähigkeit von Grundvorstellungen ab und nehmen wechselseitig Einfluss auf ihre Entwicklung.

Literatur

Eichelmann, A., Narciss, S., Schnaubert, L., & Melis, E. (2012). Typische Fehler bei der Addition und Subtraktion von Brüchen – Ein Review zu empirischen Fehleranalysen. In *Journal für Mathematik-Didaktik 33(1)*, S. 29-57.

Kollhoff, S. (2015). Analyse von Transferprozessen in der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag, 1073-1076.

Kollhoff, S. (2016). Analyse von Transferprozessen in kollaborativen Lernsituationen. In: Institut für Mathematik und Informatik der Pädagogischen Hochschule Heidelberg (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016*. Münster: WTM-Verlag, 549-452.

Ramful, A. (2014). Reversible reasoning in fractional situations: Theorems-in-action and constraints. In *Journal of Mathematical Behavior 33*, S. 119-130.

Wartha, S. (2007). *Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs*. Hildesheim: Franzbecker.