Gilbert GREEFRATH, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Hans-Stefan SILLER, Universität Koblenz-Landau, Reinhard OLDENBURG, Universität Augsburg, Volker ULM, Universität Bayreuth, Hans-Georg WEIGAND, Julius-Maximilians-Universität Würzburg, DE

Aspekte und Grundvorstellungen von Ableitung und Integral

Aspekte und Grundvorstellungen spielen bei der Entwicklung des Ableitungs- und Integralbegriffs eine zentrale Rolle im Analysisunterricht der Sekundarstufe II. Eine *Grundvorstellung* zu einem fachlichen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt. Die Ausbildung dieser Vorstellung ist eine wesentliche Voraussetzung, um mit einem Begriff verständnisvoll umgehen zu können. Mit Hilfe von *Aspekten* kann eine fachliche Charakterisierung eines mathematischen Begriffs erfolgen. Aspekte und Grundvorstellungen sind beim Umgang mit Mathematik untrennbar miteinander verbunden.

Der Ableitungsbegriff

Die Ableitung kann unter zwei fachlichen Aspekten betrachtet werden: als *Grenzwert des Differenzenquotienten* und als *lokale lineare Approximation*. Diese beiden Aspekte können inhaltlich unterschiedlich gedeutet werden und bilden so die Basis für vier Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff (s. Abb. 1). Im Folgenden beschreiben wir exemplarisch den Aspekt der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten und die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate. Für eine vollständige Beschreibung der Aspekte und Grundvorstellungen verweisen wir auf Greefrath et al. (2016, S. 147 ff.). Wird der Aspekt der Ableitung als Grenzwert eines Differenzenquotienten aufgegriffen, so werden zunächst die Differenzenquotienten $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ analysiert. Von einer absoluten Änderung $f(x)-f(x_0)$ gelangt man durch Verhältnisbildung zur mittleren Änderungsrate im Intervall $[x_0, x]$. In bestimmten Situationen ist nicht die Änderungsrate in einem Intervall interessant, sondern die lokale Änderungsrate an einer Stelle x_0. Dies wird durch Betrachtung des Grenzwerts des Differenzenquotienten ermöglicht und kann durch folgende Definition symbolisiert werden:

Sei f eine in einer Umgebung der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ definierte reellwertige Funktion. Man nennt f differenzierbar an der Stelle x_0, falls der Grenzwert $f'(x_0) \coloneqq \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert. Er wird dann als Ableitung an dieser Stelle bezeichnet.

Die Grundvorstellung „lokale Änderungsrate“ baut auf verschiedenen Begriffen zur Beschreibung von Änderungsraten aus der Sekundarstufe I auf: absolute und relative Änderung, prozentuale Änderung, Monotonie etc. Daraus resultiert die Frage, wie schnell eine Änderung in Abhängigkeit des Arguments erfolgen kann, und als Konsequenz ergibt sich die Ratenbildung in einem Intervall (vgl. Hahn & Prediger, 2008).

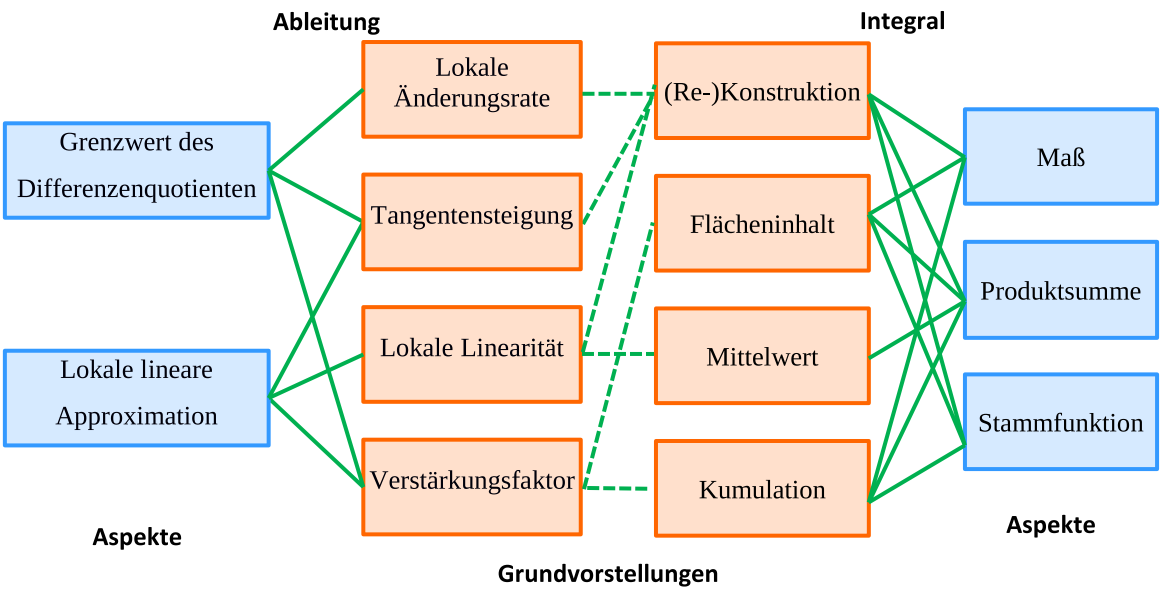

Abb. 1: Aspekte und Grundvorstellungen von Ableitung und Integral

Studien (z. B. Herbert & Pierce 2012) zeigen, dass der Begriff der (Änderungs-)Rate vielfältig und komplex ist. Zu einer umfassend ausgeprägten Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate gehören zum einen die Vorstellung von der momentanen Änderung eines Prozesses (die Vorstellung von der Momentangeschwindigkeit wird als Prototyp verwendet) und zum anderen die Vorstellung, dass die Änderung einer abhängigen Größe symbolisch durch $\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x$ beschrieben werden kann.

Der Integralbegriff

Beim Integral werden der Produktsummen-, der Stammfunktions- und der Maßaspekt voneinander unterschieden. Diese Aspekte zeichnen sich dadurch aus, dass mit ihnen der Integralbegriff fachlich charakterisiert werden kann. Sie liefern somit die Basis für Grundvorstellungen der Integralrechnung: (Re-)Konstruktionsvorstellung, Flächeninhaltsvorstellung, Mittelwertsvorstellung und Kumulationsvorstellung (s. Abb. 1). Analog zum Ableitungsbegriff beschreiben wir exemplarisch den Stammfunktionsaspekt des Integrals und die Grundvorstellung der (Re-)Konstruktion. Für eine vollständige Beschreibung der Aspekte und Grundvorstellungen zum Integralbegriff verweisen wir auf Greefrath et al. (2016, S. 238 ff.). Bestimmte Integrale können über den Begriff der Stammfunktion definiert werden:

Sei $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall I definierte Funktion, die eine Stammfunktion F besitzt. Für $a, b \in I$ wird definiert: $\int_a^b f(x)dx \ := \ F(b) - F(a)$.

Das Integral ist auf diese Weise definiert, da der Wert nicht von der Wahl der Stammfunktion abhängt. So können bestimmte Integrale umgehend berechnet werden. Über die Regeln für Ableitungen sucht man eine Stammfunktion, setzt Funktionswerte ein und erhält so einen Wert für das Integral. Allerdings sind bei einem solchen Zugang die berechneten Werte mit keiner der oben genannten Grundvorstellungen zu Integralen verbunden. Die obige Definition ist zudem unter fachmathematischen Gesichtspunkten problematisch, denn „Riemann-integrierbar sein“ und „eine Stammfunktion besitzen“ sind verschiedene Eigenschaften einer Funktion. Aus fachdidaktischer Sicht sinnvoller ist dagegen eine Definition des Integrals über Grenzwerte von Ober- und Untersummen und eine anschließende Betrachtung des Hauptsatzes im Sinne des Stammfunktionsaspekts die eine kalkülhafte Berechnung bestimmter Integrale ermöglicht.

Unter Konstruktion oder Rekonstruktion im Zusammenhang mit dem Integralbegriff versteht man sowohl die (Re-)Konstruktion einer Größe aus gegebenen Raten- bzw. Geschwindigkeitsdaten als auch die (Re-)Konstruktion einer Stammfunktion einer gegebenen Funktion. Bestand und Änderung sind in diesem Zusammenhang wichtige Kategorien (s. Hahn & Prediger 2008, S. 178). Die Unterscheidung zwischen Konstruktion und Rekonstruktion liegt in der Interpretation der Werte der Ausgangsfunktion. Fasst man sie als Werte einer gegebenen Größe auf, so bedeutet das Integrieren die Neukonstruktion eines funktionalen Zusammenhangs. Interpretiert man sie als Änderungsraten eines funktionalen Zusammenhangs, so bedeutet das Integrieren die Rekonstruktion dieses Zusammenhangs (Bender 1990). Bekannte Kontexte zu dieser Vorstellung im Sinne der Rekonstruktion einer Größe sind die Rekonstruktion eines zurückgelegten Weges aus bekannten Geschwindigkeitsdaten (s. z. B. Hußmann 2001, S. 60) oder die Rekonstruktion des vorhandenen Wasservolumens in einem Behälter aus Daten über die Zu- und Abflussgeschwindigkeit. Tatsächlich ist in vielen Fällen die Unterscheidung zwischen Konstruktion und Rekonstruktion nicht eindeutig. Der Hauptsatz führt beide Sichtweisen zusammen: „Die durch Kumulation gewonnene Funktion *F* ist dieselbe, ob man die Kumulation auffaßt ... als Neukonstruktion, wenn eine andere Funktion *f* gegeben ist, oder ... als Rekonstruktion einer Stammfunktion.“ (Tietze 2000, S. 287).

Die zweite Sicht der Rekonstruktionsvorstellung bezieht sich auf die (Re-)Konstruktion einer Stammfunktion aus den Daten einer gegebenen Funktion. Die Idee der Rekonstruktion einer Stammfunktion zu einer gegebenen Funktion kann geometrisch veranschaulicht werden. So kann der

Graph einer Stammfunktion F zum gegebenen Graphen einer Funktion f – ausgehend von einer festgelegten Stelle – beliebig genau rekonstruiert werden, indem er durch Polygonzüge nach oben und unten abgeschätzt wird (vgl. Greefrath et al. 2016, S. 249).

Die inhaltliche Deutung des Integrals im Sinne einer Konstruktion oder Rekonstruktion von Größen oder Stammfunktionen ist besonders vielfältig und hat Bezüge zu allen Aspekten des Integrals. Sie wird daher als besonders wichtig für ein inhaltliches Integralverständnis angesehen (Danckwerts & Vogel 2006, S. 98 ff.).

Fazit

Mit Hilfe von Aspekten und Grundvorstellungen zentraler Begriffe können verschiedene Begriffsfacetten im Hinblick auf das Lehren und Lernen analysiert werden. Dies ermöglicht eine detaillierte Betrachtung zum Begriffsverständnis einzelner Begriffe, aber auch die Analyse von Zusammenhängen verschiedener Begriffe auf der Ebene der Grundvorstellungen. So wird beispielsweise die Grundvorstellung der Ableitung als lokale Änderungsrate als wesentlich für die Rekonstruktionsvorstellung des Integrals angesehen (Danckwerts & Vogel 2006, S. 125). Die Rekonstruktion der Stammfunktion mit Hilfe von Tangentensteigungen ist ein Hinweis auf den Zusammenhang der Vorstellungen von Tangentensteigung und Rekonstruktion. Die lokale bzw. globale Linearisierung verbindet die Vorstellungen von lokaler Linearität und Mittelwert. Weitere Zusammenhänge können aufgezeigt werden.

Literatur

Bender, P. (1990b). Zwei "Zugänge" zum Integralbegriff? *mathematica didactica* 14, 102-127.

Danckwerts, R., & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-St., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis - Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe.* Heidelberg: Springer Spektrum.

Hahn, S., & Prediger, S. (2008). Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *Journal für Mathematikdidaktik*, 29(3/4), 163-198.

Herbert, S. & Pierce, R. (2012). What is rate? Does context or representation matter? *Mathematical Education Research Journal*, 23(4), 455-477.

Hußmann, St. (2001): *Konstruktivistisches Lernen an Intentionalen Problemen – Theoretische und empirische Studie zu den Auswirkungen konstruktivistischer, computerorientierter Lernarrangements im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II auf die Begriffsbildung und das Problemlöseverhalten,* Dissertation, Universität Essen.

Tietze, U. P., Klika, M., & Wolpers, H. H. (2000). *Fachdidaktische Grundfragen, Didaktik der Analysis – Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II*. Wiesbaden: Vieweg.