

## Die Bedeutung des operativen Prinzips für die Entwicklung funktionalen Denkens im Tablet-unterstützten Unterricht

Im Tablet-Projekt am Gymnasium Ergolding in Bayern wird beginnend in der 8. Klasse mit diesem digitalen Werkzeug unterrichtet. Jede Schülerin und jeder Schüler hat dabei ein eigenes Gerät, das auch in Prüfungen mit Hilfe der GeoGebra Prüfungsapp eingesetzt werden darf. Im Rahmen einer begleitenden Studie soll die Bedeutung des operativen Prinzips für die Entwicklung funktionalen Denkens untersucht werden. Im Folgenden wird hierzu der theoretische Hintergrund – auch anhand einer Beispielaufgabe – vorgestellt, sowie ein Ausblick auf die geplante Studie gegeben.

### 1. Theoretischer Hintergrund

Funktionales Denken ist nach Vollrath in erster Linie „[...] eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist“ (Vollrath 1989, S. 5). Er unterscheidet hierbei drei für funktionales Denken charakteristische Aspekte (vgl. Vollrath 1989, S. 7–18):

- *Zuordnungsaspekt*: Eine Funktion stiftet einen Zusammenhang zwischen Größen. Dadurch ist eine Größe abhängig von einer anderen, sie ist ihr zugeordnet.
- *Kovariationsaspekt*: Eine Funktion beschreibt, wie sich Änderungen einer Größe auf die ihr zugeordnete abhängige Größe auswirken. Dies beinhaltet die Idee der systematischen Änderung. Im Vergleich zum eher statischen Zuordnungsaspekt ist die Sicht hier also vielmehr dynamisch.
- *Objektaspekt*: Ein durch eine Funktion beschriebener Zusammenhang kann als Ganzes, die Zuordnung als neues Objekt betrachtet werden. Durch den Blick auf das Ganze sollen Eigenschaften enthüllt bzw. umgekehrt aus Eigenschaften auf das Ganze geschlossen werden. Besonders deutlich wird dies bei der Betrachtung graphischer Darstellungen.

Die Ausprägung des jeweiligen Aspekts funktionalen Denkens zeigt sich:

- im Grad des Erkennens von und Arbeitens mit Zuordnungen in verschiedenen Darstellungsformen (Zuordnungsaspekt),
- der Art und Weise der Planung, Durchführung und Analyse von Änderungen (Kovariationsaspekt),
- in der Fähigkeit zum einen das Ganze der Funktion zu erfassen und zum anderen zwischen einzelnen Eigenschaften und der Funktion als Ganzes zu wechseln (Objektaspekt).

Als einen phänomenologischen Aspekt, der für die Bildung des funktionalen Denkens eine wichtige Rolle spielt, nennt Vollrath „[...] funktionale Betrachtungen von Operationen“ (Vollrath 1989, S. 21) und die Untersuchung der durch die Operationen bewirkten Veränderungen. Dies ist im Sinne des operativen Prinzips, denn „Objekte erfassen bedeutet zu erforschen, wie sie konstruiert sind, und wie sie sich verhalten, wenn auf sie Operationen ausgeübt werden“ (Wittmann 1985, S. 9).

Operationen sind interiorisierte (also verinnerlichte) Handlungen und als solche unter anderem reversibel (sie können umgekehrt werden, eine Operation kann also neutralisiert werden), kompositionsfähig (Operationen können zu komplexeren Operationen zusammengesetzt werden) und assoziativ (die Zusammensetzung einer Operation aus einfacheren Operationen kann in verschiedener Weise vollzogen werden, es gibt verschiedene Lösungswege) (vgl. Piaget 1967, 47 ff.). Ihre Wirkung können sie allerdings nur in Bezug auf Objekte entfalten.

Daraus ergibt sich ein Dreiklang aus Objekten, Operationen und deren Wirkungen auf Eigenschaften und Beziehungen der Objekte (vgl. Wittmann 1985, S. 9). Es stellt sich nun die Frage, ob und wie bei diesem komplexen dynamischen Vorgang ein digitales Werkzeug als „Denkzeug“ unterstützend eingesetzt werden kann, um so die Konzentration auf die Aspekte der Planung, Interpretation, Analyse und Argumentation zu lenken (vgl. Vollrath und Roth 2012, S. 163).

**Funktionales Denken**

	<i>Zuordnung</i>	<i>Kovariation</i>	<i>Objekt</i>
<i>Operatives Prinzip</i>			
<i>Ausgangssituation</i>			
<i>Operationen</i>			
<i>Zielkonfiguration</i>			

**Abbildung 1: Das operative Prinzip als methodische Hilfe zur Entwicklung funktionalen Denkens. Durch Variation von Ausgangssituation, Operation oder Zielkonfiguration typischer Tätigkeiten oder Aufgaben soll die Entwicklung der Aspekte funktionalen Denkens gefördert werden.**

Zur praktischen Anwendung des operativen Prinzips schlägt Wittmann vor, ausgehend von einzelnen Objekten, Operationen oder Eigenschaften bzw. Beziehungen nach Konstellationen zu suchen, in denen sich interessante Wirkungen (oder auch keine Wirkung – was bleibt invariant?) ergeben (vgl.

Wittmann 1985, S. 10). Nun sind allerdings durch die Betrachtung des funktionalen Denkens bereits typische Situationen bzw. Aufgaben vorgegeben. Deshalb erscheint es sinnvoll, die Ausgangspunkte für die Variation anzupassen und das operative Prinzip nach Ausgangssituation, Operation und Zielkonfiguration zu untergliedern (vgl. Abb. 1).

Das operative Prinzip soll also als methodische Hilfe zur Entwicklung des funktionalen Denkens dienen (vgl. Führer 1985, S. 13), indem in Situationen, in denen funktionales Denken erfordert ist, Ausgangssituation, Operationen oder Zielkonfigurationen variiert werden und die Einflüsse dieser Variationen auf den jeweiligen Aspekt funktionalen Denkens untersucht und operationalisiert werden. Dementsprechend sollen anhand des entstehenden Rasters Aufgaben entwickelt werden, die auf diese Weise die Entwicklung funktionalen Denkens unterstützen. Im Folgenden wird beispielhaft eine solche Aufgabe dargestellt.

## 2. Beispielaufgabe

Die Aufgabe kann der Zelle „Ausgangssituation – Zuordnungsaspekt“ zugeordnet werden. Die Aufgabenstellung lautet: „Es ist eine Gerade gegeben. Diese soll die Gleichung  $y = 2 \cdot x + 3$  besitzen. Passe das Koordinatensystem so an, dass die Gerade der Gleichung entspricht.“ (vgl. Herget 2017, S. 9) Die Ausgangssituation wird hierbei invertiert, da nicht wie gewohnt das Koordinatensystem vorgegeben ist, in das eine Gerade eingezeichnet werden soll. Das funktionale Denken wird auf Ebene des Zuordnungsaspekts angesprochen, da eine graphische Darstellung eines gegebenen linearen Zusammenhangs gefordert ist.

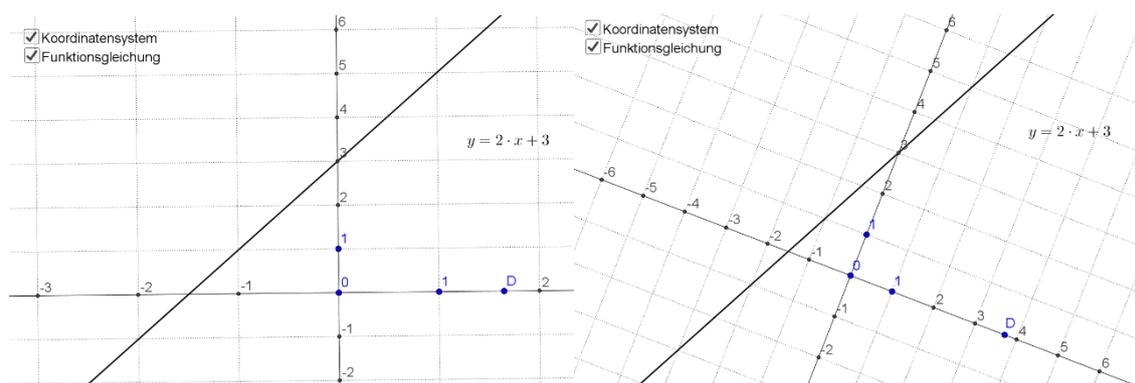


Abbildung 2: Beispiellösungen a) durch Streckung der x-Achse b) durch Drehung des Koordinatensystems und jeweiliger Verschiebung.

Die Aufgabe wurde mit Hilfe von GeoGebra zur Bearbeitung am Tablet angepasst. Das Koordinatensystem ist dabei durch Bewegung des Ursprungs frei verschiebbar, die beiden Achsen können durch Variation der jeweiligen

Achsenabschnitte „1“ gestaucht bzw. gestreckt werden und das Koordinatensystem kann mit Hilfe des Punktes „D“ als Ganzes gedreht werden. Dies sind also die zur Verfügung stehenden Operationen. Zur selbstständigen Überprüfung der Lösung kann die entsprechende Funktionsgleichung angezeigt werden.

In Abbildung 2 a) ist eine mögliche Lösung zu sehen. Hier wurde zunächst das Koordinatensystem so verschoben, dass sich der gewünschte y-Achsenabschnitt bei 3 ergibt. Anschließend wurde die x-Achse gestreckt, um die entsprechende Steigung von 2 zu erhalten. Dies würde prinzipiell dem eingeübten Vorgehen, zuerst den y-Achsenabschnitt und anschließend mit dem Steigungsdreieck die Gerade einzuzeichnen, entsprechen. Im Sinne des operativen Prinzips könnten nun in einem zweiten Schritt die zugelassenen Operationen variiert werden, um alternative Lösungswege zu suchen. Abbildung 2 b) zeigt eine solche Lösung, bei der nur das Koordinatensystem als Ganzes verschoben und gedreht wurde.

### 3. Zusammenfassung und Ausblick

Das operative Prinzip wird als methodische Hilfe zur Entwicklung funktionalen Denkens gesehen. Durch Variation von Ausgangssituation, Operation oder Zielkonfiguration im Rahmen von typischen Tätigkeiten, Problemstellungen oder Aufgaben soll die Entwicklung der Aspekte funktionalen Denkens gefördert werden.

Ziel der begleitenden Studie ist es zum einen, die Bedeutung des operativen Prinzips für die langfristige Entwicklung des funktionalen Denkens in einem durch ein Tablet unterstützten Unterricht aufzuzeigen. Zum anderen soll untersucht werden, wie mit Aufgaben, die operatives Arbeiten erfordern, umgegangen wird, d.h. welche Probleme auftreten können und insbesondere wie das digitale Werkzeug dabei eingesetzt werden kann.

### Literatur

- Führer, Lutz (1985): "Funktionales Denken": Bewegtes fassen - das Gefaßte bewegen. In *Mathematik Lehren* 1985 (11), S. 12–14.
- Herget, Wilfried (2017): Aufgaben formulieren (lassen). Weglassen und Weg lassen - das ist (k)eine Kunst. In *Mathematik Lehren* 2017 (200), S. 7–10.
- Piaget, Jean (1967): *Psychologie der Intelligenz*. 3. Aufl. Stuttgart: Rascher Verlag.
- Vollrath, Hans-Joachim (1989): Funktionales Denken. In *Journal für Mathematik-Didaktik* 10 (1), S. 3–37.
- Vollrath, Hans-Joachim; Roth, Jürgen (2012): *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*. 2. Aufl. Heidelberg: Spektrum Akad. Verl. (Mathematik Primar- und Sekundarstufe I+II: Didaktik der Mathematik).
- Wittmann, Erich Christian (1985): Objekte-Operationen-Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. In *Mathematik Lehren* 1985 (11), S. 7–11.