Erik HANKE, Universität Bremen, DE

Empirie kommunikativer Abbilder am Beispiel von Vorstellungen von Mathematikstudierenden zur Stetigkeit

Bisherige Ansätze, die Vorstellungswelt von Lernenden zu mathematischen Inhalten zu erfassen, legen nahe, dass ein mathematikdidaktisches Desiderat darin besteht, Vorstellungen einerseits als empirisches Konstrukt zu modellieren und andererseits empirische Erhebungen an Vordergrundtheorien über Vorstellungen anzubinden. Daher wird hier vorgeschlagen, Vorstellungen mithilfe der Dreiteilung ihrer *kommunikativen Abbilder* zu erfassen: *Exklamatorische Abbilder* beleuchten Ausschnitte des Selbstverständnisses von Lernenden zu einem Begriff und stehen neben *einstellungs*- und *nutzungsbezogener* Akzeptanz einzelner Vorstellungen. Verdeutlicht wird dieser empirisch gedachte Zugang anhand einer Erhebung mit Bachelorstudierenden zu (un-) stetigen reellwertigen Abbildungen (Hanke, 2016).

Theoretischer Rahmen

Vom Hofe (1995) hat die Entwicklungslinie einer *Grundvorstellungsidee* in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik nachgezeichnet. Grundvorstellungen seien speziell für Modellierungsvorgänge und Sinnkonstitution von mathematischen Begriffen unabdingbar. In Grundvorstellungen als „*genuin mathematikdidaktische Kategorie*" (vom Hofe, 1995, S. 98; Herv. im Orig.) drücke sich eine epistemologisch-normative, gar präskriptive Sichtweise aus, welche Vorstellungen es in Unterrichtssituationen – im Hinblick auf die „Anwendungsdimension des mathematischen Inhalts und [… den] Erfahrungshorizont des Schülers" (ebd., S. 123f.) – auszubilden gelte. *Primäre* Grundvorstellungen setzen die materielle Welt sowie Erfahrungsbereiche von Lernenden in Bezug zu mathematischen Konzepten; *sekundäre* Grundvorstellungen hingegen beziehen sich auf mentale Handlungen an symbolisch repräsentierten Inhalten (wie z. B. Klassen von Funktionen). Vom Hofe und Blum (2016) erklären darüber hinaus, dass Grundvorstellungen sowohl Aspekte *normativ* adäquater sowie individuell *deskriptiver* Erklärmodelle für mathematische Begriffe beinhalten. Diese beiden Teilaspekte in einem Begriff zu vereinen, macht es meines Erachtens schwierig zu klären, woraus Grundvorstellungen tatsächlich bestehen oder wie sie zu finden seien (vgl. Vogel, 2016). Die empirische Forschung zu tatsächlich vorhandenen Vorstellungen von Lernenden benutzt beide Aspekte, indem durch den Abgleich mit Grundvorstellungen eine oftmals defizitorientierte Haltung eingenommen werde (Weber, 2007). Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm und Weigand (2016) unterscheiden daher feiner zwischen „Aspekten" (eher fachlich normativ) und „Grundvorstellungen" (eher deskriptiv).

Die Idee der *concept images* (Tall & Vinner, 1981) rückt subjektive Vorstellungen aus der Perspektive von Lernenden in den Fokus empirischer Forschung, da sich in concept images die Gesamtheit individueller kognitiver Strukturen einer oder eines Lernenden zu einem mathematischen Inhalt sammle. Vinner und Dreyfus (1989) weisen dabei auf das Phänomen der Kompartimentierung hin, welchem zufolge einzelne Vorstellungen situationsbezogen auftreten und miteinander konfligieren könnten. Während die Idee der concept images hauptsächlich auf der deskriptiven Ebene liege, könne die Grundvorstellungsidee eingesetzt werden, um defizitären Lernendenvorstellungen zu begegnen (vom Hofe & Blum, 2016). Ohne Defizitvergleich rahmt Weber (2007) in der Dichotomie von sozial ausgehandelten und individuellen Vorstellungen einen lernpsychologischen Vorstellungsbegriff ein, der *reguläre* bzw. *singuläre* Vorstellungen kennt.

Taxonomie kommunikativer Abbilder

Die Durchsicht einschlägiger Publikationen zu Studierendenvorstellungen zur reellwertigen (Un-) Stetigkeit (u. a. Bezuidenhout, 2001; Schäfer, 2011; Takači, Pešić & Tatar, 2006; Tall & Vinner, 1981) hat ergeben, dass Ergebnisse empirischer Forschungsarbeit zu Studierendenvorstellungen kaum an ihren theoretischen Rahmen, die nahezu ausschließlich aus dem Verweis auf concept images bestehen, rückgebunden sind: Es scheint, als würden Vordergrundtheorien zu Vorstellungen zwar als generelles oder überblicksartiges Framework eingesetzt, jedoch stehen diesem Methodik und Ergebnisse der empirischen Erhebungen nahezu unvermittelt gegenüber. In diesem Sinne ist nicht immer explizit, was den Forschungsgegenstand auszeichnet. So liefert die Definition von concept images als Gesamtheit aller zu einem Inhalt assoziierten kognitiven Strukturen keine genaue Beschreibung, was denn nun eigentlich als Vorstellung anzusehen, noch mit welcher Konzeptualisierung sie empirisch zugänglich sei.

Meiner Auffassung nach sind Vorstellungen als mentale Entitäten prinzipiell nicht erfassbar, sondern ausschließlich ihre *kommunikativen Abbilder*. Diese Konzeptualisierung macht deutlich, dass kommunikative Abbilder nicht identisch zu den eigentlichen Vorstellungen sind, und davon auszugehen ist, dass sie durch Kommunikation nicht verlustfrei transportiert werden können. Insofern erscheint es sinnvoll, zu unterscheiden, anhand welcher Kommunikationsanlässe sie sich äußern. Vorstellungen verstanden als lokale und temporäre Äußerungen individueller Rekonstruktionen mathematischer Inhalte werden somit in drei empirisch unterscheidbaren Facetten sichtbar: 1. *Exklamatorische Abbilder* äußern Lernende, wenn sie explizit nach ihren Vorstellungen zu einem Begriff befragt werden. Diese umfassen demnach die Selbstbewertung seitens der Lernenden, was zu ihren Vorstellungen gehöre, und beinhalten Beschreibungen davon, was Lernende als Vorstellung einstufen bzw. mitteilungswürdig werten. In diesem Sinne sind exklamatorische Abbilder nicht kontextuell gebunden, sondern beruhen auf einer Metasicht der Lernenden auf den infrage stehenden mathematischen Begriff. 2. Ein einer bzw. einem Lernenden auf irgendeine Weise zugänglich gemachtes kommunikatives Abbild einer Vorstellung kann von ihr bzw. ihm auf Akzeptanz hin überprüft und bewertet werden (*Einstellungsakzeptanz*). 3. Basierend auf der Prämisse, dass Lernende beim mathematischen Tätigsein Vorstellungen nutzen, kann ihre *Nutzungsakzeptanz* von einzelnen Vorstellungen, z. B. beim Lösen von Aufgaben, durch verschiedene Kommunikationsmittel beobachtet werden.

Zwischen Vorstellungen zu Begriffen bzw. Klassen von Objekten (etwa „Stetigkeit an sich“) und einzelnen Instanzen (z. B. eine konkrete Funktion) ist zu unterscheiden fraglich ist, inwiefern *Klassenvorstellungen* mit *Instanzvorstellungen* zusammenhängen und welche Rolle insbesondere die Visualisierung einnimmt: Es ist zu klären, ob Instanzvorstellungen überhaupt von ihren peripheren Eigenschaften gelöst werden können, um als Klassenvorstellungen potentiell tragfähig zu sein (vgl. Presmeg (1992)).

Beispiel der Erhebung der drei Facetten kommunikativer Abbilder

In (Hanke, 2016) wurden kommunikative Abbilder von Vorstellungen zur Stetigkeit von Mathematikstudierenden nach einer Vorlesung zur Analysis I mithilfe eines dreigeteilten Fragebogens in Anlehnung an Schäfer (2011) erhoben. Die erste Frage „Formulieren Sie, was Stetigkeit für Sie persönlich anschaulich ausmacht.“ zielte auf verbalisierte Abbilder von Vorstellungen ab, da die Studierenden ihre Vorstellungen nicht anhand mathematischen Tätigseins benennen sollten. Im zweiten Teil bewerteten die Studierenden, wie sehr sie Vorstellungen (verbalisiert als fiktive Studierendenäußerungen, etwa „Stetigkeit bedeutet, dass man […] die Schwankung der Funktionswerte [lokal] kontrollieren kann.“ oder „Der Graph hat keine Sprünge.“) auf einer sechsstufigen bipolaren Likert-Skala (stimme gar nicht zu, …, stimme voll zu) akzeptierten. Drittens, Aufforderungen der Art „Argumentieren Sie mit verschiedenen Vorstellungen, an welchen Stellen die folgende Funktion stetig ist.“ erhoben kommunikative Abbilder gemäß der Nutzungsakzeptanz (z. B. $f = id_{\mathbb{Q}}$ oder $s(x)=sin(1/x)$ für $x \neq 0$ und $s(0)=0$) (Hanke, 2016). Ein Kategoriensystem und ein Kodierschema über die in der Literatur dokumentierten Vorstellungen zur reellwertigen Stetigkeit wurden mithilfe qualitativer Inhaltsanalyse erstellt, zur Formulierung der fiktiven Vorstellungsabbilder und zur deduktiven Auswertung des Fragebogens genutzt. Auch ein rein induktives Vorgehen bei der Auswertung empirisch gewonnener Daten über kommunikative Abbilder wäre denkbar.

Ausblick

Eine empirisch orientierte mathematikdidaktische Fundierung eines Vorstellungsbegriffs, der berücksichtigt, welche Kommunikations- bzw. Handlungsanlässe welche Vorstellungen fördert oder fordert, sowie die Herausschälung von Gemeinsamkeiten und Unterschiedenen verschiedener Vorstellungskonzepte stehen meiner Kenntnis nach aus (vgl. aber Greefrath et al., 2016; Vogel, 2016; vom Hofe & Blum, 2016; Weber, 2007). Ebenso sollte der Zusammenhang von Instanz- und Klassenvorstellungen hinsichtlich der hier aufgeworfenen Idee kommunikativer Abbilder geklärt werden.

Danksagung

Ich bedanke mich beim Bundesministerium für Bildung und Forschung für die Unterstützung des Teilprojekts „Spotlights Lehre“ im Rahmen des Projekts „Schnittstellen gestalten“.

Literatur

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: some conceptions of first-year students. *Int. Journal of Math. Educ. in Science and Technology, 32*(4), 487–500.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). Aspects and “Grundvorstellungen” of the Concepts of Derivative and Integral. Subject matter-related didactical perspectives of concept formation. *JMD, 37*(1), 99–129.

Hanke, E. (2016). *Ausprägung und Akzeptanz von Vorstellungen zur Stetigkeit bei Mathematikstudierenden* (unveröffentlichte Masterarbeit). Universität Bremen, Bremen.

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum.

vom Hofe, R. & Blum, W. (2016). “Grundvorstellungen” as a category of subject-matter didactics. *JMD, 37*(1), 225–254.

Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *ESM, 23*(6), 595–610.

Schäfer, I. (2011). Vorstellung von Mathematiklehramtsstudieren[!] zur Stetigkeit. *BzMU 2011, 2*, 723–726.

Takači, D., Pešić, D. & Tatar, J. (2006). On the continuity of functions. *Int. Journal of Math. Educ. in Science and Technology, 37*(7), 783-791.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *ESM, 12*(2), 151–169.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *JRME, 20*(4), 356–366.

Vogel, M. (2016). Mentale Modelle – Ausgewählte Aspekte mathematikdidaktischer Adaptionen. *BzMU 2016, 3*, 1377–1380.

Weber, C. (2007). *Mathematische Vorstellungen bilden. Praxis und Theorie von Vorstellungsübungen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II*. Bern: hep Verlag AG.