

Zwischen Situationen und formal-mathematischen Begriffen

1. Problemaufriss, Forschungs- und Entwicklungsfokus

Aus schulischer Perspektive wird von Lernenden unter der Leitidee ‚funktionaler Zusammenhang‘ ein „[A]nalisieren, [I]nterpretieren und [V]ergleichen unterschiedliche[r] Darstellungen funktionaler Zusammenhänge“ (KMK 2004, S. 11) gefordert. Lineare, proportionale und antiproportionale Funktionen verkörpern dabei die ersten Spezifizierungen des Funktionsbegriffs in der Sekundarstufe I und legen damit den Grundstein für weitere Funktionstypen. Doch schon bei den einfachen Funktionen verwechseln Lernende Aspekte von situativen Darstellungen mit denen der formal-mathematischen Begriffe. Insbesondere bei linearen und antiproportionalen Abnahmeprozessen zeigen sich Schwierigkeiten (u.a. De Bock et al. 2015). Um diese Hürden genauer zu verstehen wird unter einem qualitativen Fokus die Frage untersucht, inwiefern Merkmale von situativen und formalen Darstellungen der Funktionstypen von den Lernenden isoliert bzw. aufeinander bezogen verwendet werden. Darüber hinaus wird erforscht, welche Hinweise sich für eine Restrukturierung des mathematischen Lerngegenstands linearer, proportionaler und antiproportionaler Funktionen in ihrer Anwendung in verschiedenen Situationen ergeben.

2. Theoretische Festlegungen

Für eine psychologische Perspektive auf individuelle Begriffe und deren Bildungsprozesse wird der Ansatz der ‚Epistemologie der inferentiell gegliederten Wissensstrukturen‘ (Hußmann et al. submitted) genutzt. Über explizite Aussagen der Lernenden und deren Begründungszusammenhänge werden Argumentationsweisen erfasst und rekonstruiert. Für eine mathematikdidaktische Perspektive auf eine situative und formale Dimension wird ein Fokus auf das Mathematisieren als Teilprozess des Modellierens gelegt. Betrachtete Merkmale werden als *situativ* gedeutet, wenn die verwendeten Prädikate in den Aussagen der Lernenden kontextuellen Beschreibungen zuzuordnen sind, dahingegen als *formal* interpretiert, wenn sie sich auf nicht-kontextuelle Aspekte der formal-mathematischen Darstellungen (bspw. Tabelle, Graph) beziehen. Grundvorstellungen gelten dabei als Bindeglied zwischen den Ebenen, als lokale Bedeutung des formal-mathematischen Begriffs zur Strukturierung der Situation. Auf Basis individueller Bedeutungszuweisungen und ihren Begründungen werden Vorgehensweisen in den verschiedenen Darstellungen rekonstruiert, um situationsübergreifende Handlungsmuster zu erfassen.

3. Methodisches Vorgehen

Zunächst wurden im Rahmen klinischer Interviews diagnostische Erhebungen durchgeführt. Eine Grundlage bildeten (halb-)offene, mehrdeutig interpretierbare Situationen, die eine Anwendung der mathematischen Begriffe in vielfältiger Weise möglich machten. Zum Beispiel bekamen die Lernenden das Bild einer brennenden Kerze und mussten zunächst relevante Größen benennen, um daraufhin den funktionalen Zusammenhang zwischen den Größen zu identifizieren und zu begründen (vgl. Abb. 1, weitere Beispiele unter 4.). Unter dem Ansatz der fachdidaktischen Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell (Hußmann et al. 2013) – mit dem Ziel Forschung und Entwicklung miteinander zu verschränken – wurden auf Basis der diagnostischen Ergebnisse Design-Experimente zu spezifischen Aufgabenformaten durchgeführt. Zum einen wurden mit dem Designelement der *Kontrastierung* (zur Erkundung spezifischer Unterschiede) lineare und antiproportionale Abnahmeprozesse, sowohl auf situativer als auch formaler Ebene, innerhalb eines Kontexts unmittelbar gegenübergestellt. Zum anderen wurde eine *Variation* der mathematischen Begriffe (zur Entfaltung von Mehrperspektivität) durch das Angebot verschieden kombinierbarer Größen innerhalb eines Kontexts angebahnt. Insgesamt wurden 14 Lernende von achten und neunten Klassen interviewt.



Abbildung 1: Kerzenaufgabe

4. Ausgewählte empirische Ergebnisse

Im Rahmen der diagnostischen Erhebungen konnten als mögliche Gründe für eine Verwechslung der funktionalen Zusammenhänge verschiedene Facetten von Begründungsmustern rekonstruiert werden. Anhand einzelner, empirischer Beispiele werden die Phänomene illustriert (zentral genutzte Merkmale sind fett gedruckt):

- Eine fachlich nicht tragfähige Koexistenz von herangezogenen Merkmalen auf der situativen und formalen Ebene.

Bei bspw. der Situation ‚Je mehr Löcher desto weniger Käse‘ (die nur unter Betrachtung gleich großer Löcher einen linearen Abnahmeprozess beschreibt) wurde situativ ein antiproportionaler Zusammenhang angenommen. Begründet wurde dieser nicht tragfähig mit einem **Startwert ungleich Null** („wenn jetzt der Käseblock ohne Löcher ist und 500 Gramm wiegt...“) und nicht ausreichend tragfähig mit einem **mehr-weniger Zusammenhang** („...und die Löcher jetzt mal da drin sind, also rein machst, dann wird der ja auch weniger, weil im Prinzip der Käse ja fehlt“). Auf formaler Ebene wurde hingegen zur Begründung einer antiproportionalen Funktion eine Tabelle

(vgl. Abb. 2) erstellt, in der die **reziproke Vervielfachungseigenschaft** als Begründungsbasis genutzt wurde („Weil ich hab das jetzt zum Beispiel mal zwei und hier ist es durch zwei. Und so ist es hier das Doppelte und hier die Hälfte“). Aus Lernenden-sicht führten die herangezogenen Merkmale auf beiden Ebenen nicht zu einem Konflikt, da sie nicht aufeinander bezogen wurden. Der situativ angenommene Startwert wurde in der Tabelle nicht berücksichtigt, während umgekehrt die reziproke Vervielfachungseigenschaft in der Tabelle nicht situativ gedeutet wurde.

Läh.	gew.(g)
20	400g
40	200

:2

-2

Abbildung 2: Tabelle zur Käseaufgabe

- Eine Übergeneralisierung monotoner Veränderungen als handlungsleitende Merkmale auf beiden Ebenen.

Situationen wurden fachlich nicht tragfähig als nicht funktional gedeutet, wenn die abhängigen Größen sich **nicht monoton** verändern. Das hat gezeigt, dass die monotonen Eigenschaften der einfachen Funktionstypen auf den allgemeinen Funktionsbegriff übertragen wurden. Darüber hinaus wurde – sowohl auf situativer als auch formaler Ebene – ein **mehr-mehr Verhalten** zwischen den Größen häufig mit Proportionalität und ein **mehr-weniger Verhalten** mit Antiproportionalität identifiziert. Das konnte dazu führen, dass auf situativer Ebene bspw. in der rein bildlich gegebenen und damit mehrdeutig interpretierbaren Situation einer brennenden Kerze der angenommene proportionale Zusammenhang zwischen der Brenndauer und der bereits abgebrannten Höhe der Kerze (als mehr-mehr Zusammenhang) als umkehrbar in einen fachlich nicht tragfähigen antiproportionalen Zusammenhang (als mehr-weniger Zusammenhang) zwischen der Brenndauer und der Resthöhe der Kerze gedacht wurde. Dabei (und auch in anderen Situationen) sind die Begriffe der Proportionalität und Antiproportionalität näher zusammengerückt, als es die fachliche Perspektive zulässt.

- Die Komplexität der Unterscheidung einer fortgesetzten Subtraktion linear fallender und Division antiproportionaler Zusammenhänge.

Bei der Situation ‚100 Bonbons sollen bei einer Gruppe von Kindern fair geteilt werden‘ gelang es nur einer Lernenden der Stichprobe auf situativer Ebene zwischen einem sowohl deutbaren **antiproportionalen Zusammenhang** (100 Bonbons werden auf verschieden große Gruppen verteilt) als auch **linear fallenden Zusammenhang** (100 Bonbons werden sukzessive in gleichen Portionen verteilt bzw. ausgeteilt) zu unterscheiden und damit mehrdeutige Perspektiven einzunehmen. Aber auch dieser Probandin gelang es nicht, diese verschiedenen Perspektiven auf die Situation auf formaler Ebene

mit den relevanten Aspekten der einzelnen mathematischen Begriffe zu verknüpfen (Anfangswert bei Eins und eine reziproke Vervielfachungseigenschaft antiproportionaler Funktionen vs. Startwert ungleich Null und eine feste Abnahme linearer Funktionen).

Um dieser Komplexität und den Verwechslungen der Begriffe bei den Lernenden zu begegnen, lieferten die erprobten Aufgabenformate Hinweise darauf, dass es insbesondere durch die unmittelbare *Kontrastierung* linearer und antiproportionaler Abnahmeprozesse gelingen kann, dass die eingeschränkte Tragfähigkeit monotoner Veränderungen erkannt und die spezifischen Änderungsverhalten der Typen für eine Unterscheidung berücksichtigt werden können. Es konnten Begründungen rekonstruiert werden, die neben bspw. ‚Das ist antiproportional, weil...‘ nun auch welche, wie ‚Das ist nicht antiproportional, weil...‘ hervorgebracht haben, so dass dem Begriff nicht nur einschließende, sondern auch ausschließende Merkmale des anderen Begriffs zugeordnet wurden. Das Aufgabenformat mit dem Element der *Variation* hat dazu beigetragen, dass offene Situationen überhaupt mehrperspektivisch betrachtet und Aspekte der verschiedenen Begriffe untereinander diskutiert wurden.

Ausblickend betrachtet sollten Aufgabenformate einerseits Anlass dazu geben situative und formale Merkmale der *einzelnen* Begriffe aufeinander bezogen betrachten und diskutieren zu können und andererseits eine Erkundung von Gemeinsamkeiten und Unterschieden der Typen *untereinander* ermöglichen, um einer Isolierung und Übergeneralisierung von Merkmalen und Funktionstypen zu begegnen.

Literatur

- De Bock, D., Van Dooren, W. & Verschaffel, L. (2015). Students' understanding of proportional, inverse proportional, and affine functions: two studies on the role of external representations. *International Journal of Science and Mathematics Education* 13(1), pp. 47-69.
- Hußmann, S., Schacht, F., Schindler, M. (submitted). An epistemological and inferential theory of conceptual development – illustrated by examples of an empirical study on decimal numbers. Submitted to: *Mathematics Education Research Journal*.
- Hußmann, S., Thiele, J., Hinz, R., Prediger & S., Ralle, B. (2013). Gegenstandsorientierte Unterrichtsdesigns entwickeln und erforschen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In: M. Komorek & S. Prediger (Hrsg.). *Der lange Weg zum Unterrichtsdesign. Zur Begründung und Umsetzung fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsprogramme*, S. 25-42. Münster: Waxmann.
- Kultusministerkonferenz (Hrsg.) (2004). *Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss. Beschluss vom 04.12.2003*. München: Wolters Kluwer.