Kerstin HEIN, Technische Universität Dortmund, DE

Förderung des deduktiven Schließens – Ein Entwicklungsforschungsprojekt in Klasse 9-11

Herausforderung „Logische Struktur des deduktiven Schließens"

Beweisen bzw. Deduktives Schließen, das Ableiten mathematischer Sätze von anderen mathematischen Sätzen, ist eine große Herausforderung sowohl für Lernende der Sekundarstufen als auch für Studierende. Empirische Studien haben unterschiedliche Gründe für diese Schwierigkeiten identifiziert (Harel & Sowder, 1998). Das hier beschriebene fachdidaktische Entwicklungsforschungsprojekt fokussiert sich auf eine große Herausforderung, nämlich das Verstehen der logischen Struktur deduktiver Schlüsse, welche selten im Mathematikunterricht expliziert wird (Hemmi, 2008). Visualisierungen und Messungen sind im Unterricht zunächst Möglichkeiten, um mathematische Aussagen zu überprüfen. Um jedoch auch die Syntax hinter dem semantischen Teil der deduktiven Schlüsse zu verstehen, muss die logische Struktur expliziert werden (Durand-Guerrier et al., 2011). Bei der logischen Struktur der deduktiven Schlüsse wird hier das Toulmin-Modell (1958) (Voraussetzung, Schlussregel, Stütze, Schlussfolgerung, Operator, Ausnahmeregel) angenommen, das hier nicht nur zur nur für die Analyse genutzt wird, sondern auch als Ziel der Explikation, um Einblicke in die logische Struktur zu ermöglichen.

Um diese Hürde zu bewältigen, wird vorgeschlagen die logische Struktur des deduktiven Schließens zu explizieren und ihre sprachlichen Repräsentationen zu klären (Durand-Guerrier et al., 2011). Durch strukturelles und verbales Scaffolding sollen im Projekt die Lernenden unterstützt werden, die anspruchsvollen Lernprozesse beim Erlernen der Explikation der logischen Struktur und deren Beziehungen zu bewältigen (Wood et al., 1976).

Methoden des Entwicklungsforschungsprojekts

Das Projekt MuM-Beweisen verfolgt zwei Ziele: Die Entwicklung eines Lehr-Lern-Arrangement zur Explikation der logischen Struktur des deduktiven Schließens mit dem Designprinzip des Scaffolding und die empirisch begründete Bildung lokaler Theorien über die Lernprozesse der Lernenden. Aus diesen Gründen wurde als methodologischer Rahmen die fachdidaktische Entwicklungsforschung mit Fokus auf Lernprozessen gewählt (siehe Prediger et al., 2012).

Für diese Studie wurden bisher 4 Designexperimentzyklen mit 20 Lernenden der 9. und 10. Klasse (in Laborsituationen) und 8 Lernenden aus der 11. Klasse (in der Gruppe) durchgeführt. Die Fallstudie stammt vom 3. Zyklus, in dem Designexperimente mit 5 Paaren videographiert wurden, in jeweils zwei Sitzungen à 60 Minuten. Die Lernenden hatten zuvor schon Winkelsätze im Unterricht kennengelernt. Der empirische Teil dieses Artikels stellt kurz das Fallbeispiel Cora und Lydia der 9. Klasse dar, bei dem die Autorin als Leiterin der Designexperimente fungierte.

Die qualitative Datenanalyse wurde anhand der Transkripte der Videos in Hinblick auf die Entwicklung der Lernenden der Explikation der Elemente der logischen Struktur nach Toulmin (vgl. Krummheuer, 2003) und deren Beziehungen durchgeführt.

Design des Lehr-Lern-Arrangements „Mathematisch argumentieren"

Als mathematischer Inhalt wurden Winkelsätze gewählt, da sie durch ihre lokale Ordnung voneinander abgeleitet werden können und als eine der ersten Sätze im Curriculum mehrschrittig, deduktiv geschlossen werden können.

Zum strukturellen Scaffolding (siehe genauer Hein & Prediger, 2017) werden für jeden Schritt materialisierte Argumentationsstrukturen auf Papier genutzt wie in Abb. 1. Zusätzlich zur Struktur in Toulmins Modell (1958) wird im zweiten Feld expliziert, warum mit den Voraussetzungen aus der konkreten Aufgabe auch die Voraussetzungen für den allgemeinen Wenn-Dann-Satz (im Arrangement als Argument bezeichnet) erfüllt sind. Jeder hergeleitete, mathematische Satz kann als Schlussregel für die nächste Herleitung eines neuen Satzes verwendet werden. Das Verwenden materialisierten Argumentationsstrukturen in jedem Schritt ermöglicht es den Lernenden die impliziten Elemente der logischen Struktur zu explizieren.

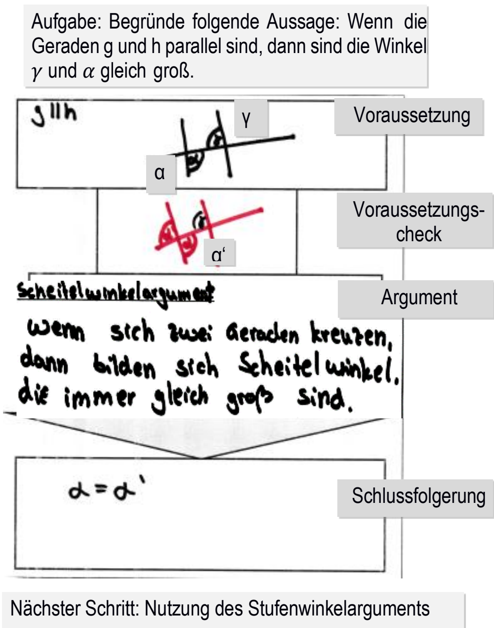

Abbildung 1: Materialisierte Argumentationsstrukturen als strukturelles Scaffolding

Verbales Scaffolding (Gibbons, 2002) erfolgt mündlich durch die Leiterin der Designexperimente, indem die Beziehungen zwischen den Elementen der logischen Struktur (kausale, konditionale und konsekutive) ausgedrückt werden. Entlang der materialisierten Strukturen werden die deduktiven Schlüsse durch die Lernenden schließlich verschriftlicht.

Empirische Einsichten in die Lernprozesse von Cora und Lydia bei der Explikation der logischen Struktur

Die Schülerinnen leiten in dieser Aufgabe den Wechselwinkelsatz her und benutzen im ersten Schritt den Scheitelwinkelsatz, den sie sich vorher erschlossen haben. Durch eine Gegenüberstellung der Nennung der einzelnen Elemente der logischen Struktur 1. *vor der Nutzung der materialisierten Argumentationsstrukturen*, 2. *während des Ausfüllens* jener und 3. *bei der Verschriftlichung anhand der materialisierten Argumentationsstrukturen* wird der Prozess der Explikation aufgezeigt:

1. Vor dem strukturellem Scaffolding: Cora nennt die Voraussetzungen für den Scheitelwinkelsatz „wenn wir das erstmal den Scheitelwinkel dazu bilden" [Turn 523] und bezeichnet mit Lydia das für diesen Schritt benötigte Argument wiederholt und teilweise auch nach der Nennung später benötigter Argumente als „Scheitelwinkel" oder auch „Scheitelwinkelargument".

2. Während des Ausfüllens der materialisierten Argumentationsstrukturen: Nach dem Abzeichnen der geometrischen Konstruktion in das erste Feld sagen Lydia und Cora folgendes (siehe Abbildung 1 für ersten Schritt):

550 Lydia:	Betrachten ja Alpha und Alpha Strich.
551 Cora:	[*zeichnet mit einem roten Stift Zeichnung nochmal in das kleine Feld und zeichnet diesmal auch den Scheitelwinkel Alpha Strich zu Alpha ein. Der Winkel Gamma wird mit schwarzen Stift eingetragen*] [*Pause 11 Sek*]
551 Lydia	So jetzt brauchen wir
553 Cora	[*legt die Scheitelwinkelargument-Karte auf das mittlere Rechteckfeld*]
554 Lydia:	Scheitelwinkel
555 Cora:	Weil das bedeutet nämlich, dass [*schreibt „$\alpha = \alpha'$" in das untere Rechteckfeld*]…

Hier wird durch das Material die Identifizierung und Explikation aller Elemente der logischen Struktur eingefordert, auch wenn deren Beziehungen (auch bei anderen Lernendenpaaren) beim Ausfüllen kaum genannt werden.

3. Verschriftlichungen anhand materialisierter Argumentationsstrukturen: Lydia schreibt zu diesem Schritt „Zuerst bildet man den Scheitelwinkel zu α und (α'). Das Scheitelwinkelargument besagt, dass α und α' gleich groß sind." Lydia nennt hier nicht nur die Voraussetzungen für den Wenn-Dann-Satz „Scheitelwinkel", sondern expliziert nun die Schlussregel „Scheitelwinkelargument" und nennt die daraus resultierende Schlussfolgerung.

Diskussion

Das materialisierte strukturelle Scaffolding scheint zu wirken, denn es werden in vielen Lernendentexten mehr Elemente der logischen Struktur entlang der materialisierten Strukturen genannt, linearer geordnet und mehr Beziehungen – wenn auch lückenhaft – sprachlich ausgedrückt. Auch wenn im 3. Zyklus nur 10 Lernende untersucht wurden und auch nur im Bereich der Winkelsätze, so zeigt sich, dass Lernende grundsätzlich mit Hilfe des Scaffoldings die Elemente der logischen Struktur ermitteln können. Die Analyse der Sprachmittel in den Lernprozessen zeigt (auch wenn diese hier nicht dargestellt werden kann) allerdings auch – neben den strukturellen – die hohen, lexikalisch-syntaktisch Anforderungen an die Lernenden. Je mehr Elemente der logischen Struktur expliziert werden, desto mehr Beziehungen zwischen diesen müssen natürlich auch ausgedrückt werden. So ist dabei aber insbesondere die sprachliche Integration des explizierten Wenn-Dann-Satzes und dessen Unterscheidung (z.B. allgemeine Voraussetzung wie Stufenwinkel und die Implikation gleicher Winkelmaße) von seiner konkreten Anwendung (z.B. Winkel in der Aufgabe) anspruchsvoll (Prediger & Hein, 2017).

Literatur

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S., & Tanguay, D. (2011). Examining the Role of Logic in Teaching Proof. In G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (Bd. 15, S. 369–389). Dordrecht: Springer Netherlands.

Gibbons, P. (2002). *Scaffolding language, scaffolding learning: teaching second language learners in the mainstream classroom*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. *CBMS Issues Mathematics Education, 7*, 234–283.

Hein, K., & Prediger, S. (2017, im Druck). Fostering and investigating students' pathways to formal reasoning: A design research project on structural scaffolding for 9th graders. *Erscheint in Proceedings of CERME 10*. Dublin: ERME.

Hemmi, K. (2008). Students encounter with proof: the condition of transparency. *ZDM Mathematics Education, 40,* 413-426.

Krummheuer, G. (2003). Argumentationsanalyse in der mathematikdidaktischen Unterrichtsforschung. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *35*(6), 247–256.

Prediger, S., & Hein, K. (2017, eingereicht). Fostering students in conducting and expressing multi-step mathematical argumentations – A design research study on language demands for a challenging subject-specific genre. Eingereichtes Manuskript.

Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Thiele, J., & Ralle, B. (2012). Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen – Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. *MNU*, *65*(8), 452–457.

Toulmin, S. E. (1958). *The Uses of Arguments*. Cambridge: Cambridge University Press.

Wood, D., Bruner, J. S., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of child psychology and psychiatry*, *17*(2), 89–100.