Anke LINDMEIER, IPN Kiel, DE, Meike GRÜSSING, Universität Vechta, DE, Aiso HEINZE, IPN Kiel, DE, Esther BRUNNER, PH Thurgau, CH

Wie kann mathematisches Argumentieren bei 5-6jährigen Kindern aussehen?

Mathematisches Argumentieren ist aus normativer Sicht ein wichtiger Gegenstand von Mathematikunterricht. Entsprechend ist die Vermittlung von Argumentationsfähigkeiten ein Zielbereich von Mathematikunterricht, der bereits in der Grundschule angebahnt wird. Neben diesen Gegenstandsaspekt tritt ein Lernprozessaspekt, da Argumentationsprozessen beim Erwerb konzeptuellen Verständnisses eine wichtige Rolle zugeschrieben wird. Mathematische Argumentationen können unter diesem Blickwinkel auch in instruktionalen Prozessen eine wichtige Vermittlerrolle einnehmen.

Doch trotz des zugesprochenen Stellenwertes sind mathematische Argumentationskompetenzen von Kindern im Vor- oder Grundschulalter wenig untersucht. Insbesondere ist unklar, was unter altersgemäßen mathematischen Argumentationsfähigkeiten zu Schulbeginn verstanden werden kann. Zur Klärung des Begriffs kommt erschwerend hinzu, dass in der deutschen Tradition formell Mathematikunterricht erst mit Beginn der Grundschule einsetzt (vgl. aber im Gegensatz dazu Traditionen mit domänenspezifisch geprägter Vorschule, z.B. in der Schweiz oder den USA).

Es ist also eine offene Frage, inwieweit es sinnvoll ist, eine domänenspezifische Ausdifferenzierung speziell mathematischer Argumentationskompetenzen bereits im Vorschulalter anzunehmen. Ziel dieses Beitrags ist entsprechend, theoriegeleitet zu analysieren, welches Verständnis mathematischer Argumentationsfähigkeiten für Kinder am Ende der Kindergartenzeit angemessen erscheint und dies mit Hilfe einer Beispielanforderung zu illustrieren. Damit soll der Beitrag Aspekte einer Argumentationskultur für den Kindergarten beschreiben (vgl. Jahnke & Ufer, 2015).

Mathematisches Argumentieren

Mathematisches Argumentieren bezeichnet Prozesse, die auf eine Herleitung, Überprüfung, Verifikation oder Zurückweisung mathematischer Aussagen ausgerichtet sind. Beweise erscheinen als formales Produkt eines streng deduktiv-logischen Argumentationsprozesses und müssen besondere Bedingungen erfüllen. Insbesondere dürfen sie nur auf (B1) gesicherte Aussagen zurückgreifen, (B2) müssen akzeptierten Schlussregeln folgen, (B3) nachvollziehbar repräsentiert sein und (B4) in einem sozialen Akzeptanzprozess als gültig anerkannt sein (zsf. vgl. Jahnke & Ufer, 2015). Damit ist evident, dass die Gültigkeit von Beweisen im Speziellen sowie Argumentationsprozesse im Allgemeinen vom sozialen Bezugsrahmen, in dem sie stattfinden, abhängen. Stylianides (2006) nutzt daher beispielsweise bei Argumentationsprozessen in der Grundschule den vier Bedingungen entsprechende Analysekriterien, um der Frage nachzugehen, was man unter einer altergemäßen Form von Beweisen im Grundschulkontext verstehen kann. Eine ähnliche Annährung liegt diesem Beitrag zu Grunde.

Mathematisches Argumentieren im Kindergarten

Die Abgrenzung eines Verständnisses von mathematischem Argumentieren im Kindergarten muss nun zuerst die Eigenheiten mathematischen Lernens in diesem Alter berücksichtigen. Dies sind zum einen inhaltliche Aspekte, so dass mathematisches Argumentieren nur auf Basis des (B1) mathematischen Wissens stattfinden kann, das den Kindern gesichert zur Verfügung steht. Es wäre aber verkürzend anzunehmen, dass ein Verständnis von mathematischem Argumentieren alleine im Sinne einer inhaltlichen Reduktion schon auf den Vorschulkontext übertragbar wäre. Zum anderen sind im Gegensatz zum schulischen Lernen vorschulische Lernprozesse im Bereich Mathematik – je nach Tradition stärker oder weniger stark – informell und entsprechend kann kaum auf standardisierte Arten der Darstellung mathematischer Strukturen, wie beispielsweise klare Begrifflichkeiten, zurückgegriffen werden. Mathematische Strukturen erscheinen zudem in Alltagssituationen und werden – im Gegensatz zu schulischen Lernprozessen – auch nicht notwendigerweise davon abstrahiert, so dass die Unterscheidung zwischen Aspekten des Weltverständnisses und des mathematischen Verständnisses unscharf ist (vgl. Baroody et al., 2006). Es gilt also zu berücksichtigen, welche (B3) Repräsentationsformen in Argumentationsprozessen für die Kindergartenkinder nutzbar sind. Zuletzt hängen informelle Lerngelegenheiten stark vom Umfeld der Kinder ab. Hier spielen häusliche wie institutionelle Faktoren eine Rolle, beispielsweise der mathematische Anregungsgehalt zu Hause (z.B. Niklas & Schneider, 2014) oder Merkmale der Prozessqualität in Kindergärten. In diesen sozialen Rahmungen konstituiert sich auch, welche (B2) Argumentationsnormen gültig sind und (B4) welche Art von Argumentationen in Bezug auf ihre Überzeugungskraft funktional sind.

Unter Berücksichtigung der genannten Eigenheiten mathematischen Lernens im Kindergarten bleibt zu eruieren, wie Anforderungen mathematischen Argumentierens im Kindergarten beschrieben werden können. In einem heuristischen Modell kann vorläufig mit zwei Stufen gearbeitet werden: Basale Anforderungen mathematischen Argumentierens beziehen sich auf das *Erkennen relevanter Strukturen* in mathematischen Situationen. Das *Nutzen relevanter Strukturen* zur Erklärung mathematischer Zusammenhänge ist ein weiterer Anforderungsbereich, der im Sinne kognitiver Taxonomien als höherstehender Bereich aufgefasst werden kann. Für den zweiten Anforderungsbereich soll hier ein Aufgabenbeispiel aus dem materialbasierten Interview *Mathematisches Argumentieren im Kindergarten* (MAiK) genutzt werden, um Aspekte einer Argumentationskultur zu beschreiben. Die Analyse beschränkt sich hier auf die Aufgabenanforderung, die Wissensbasis (B1) sowie Hinweise auf Unterschiede in den Argumentationsnormen (B2) bei Kindergartenkindern.

Beispielhafte Anforderungen und Argumentationsnormen

Aufgabe Schokolade (verkürzt dargestellt):
(benötigt werden Material aus Moosgummi, Handpuppen Bodo und Lisa)
Jetzt geht es um Schokolade. Das hier soll eine volle Tafel Schokolade sein (F1). Das hier ist Bodos Rest (F2) und das hier ist Lisas Rest (F3). Bodo guckt jetzt, was Lisa noch hat ... und sagt dann: „Ich habe mehr als du, Lisa!“ Was meinst du dazu? (Warum?)

(Beschriftung nicht original)

Anforderungsbereich Nutzen relevanter Strukturen: Bei der Aufgabe handelt es sich um eine im Kontext präsentierte falsche Aussage über einen mathematischen Sachverhalt, die evaluiert und argumentativ wiederlegt (bzw. eine alternative Aussage belegt) werden muss. Dabei sind die Beziehungen zwischen den auftretenden geometrischen Figuren zu nutzen.
Wissensbasis (B1): Die Beziehung ergibt sich aus der zu erkennenden mathematischen Struktur, denn beide Reste entsprechen den gleichen Anteilen (Hälften) eines Ganzen, wobei ein Vergleich der Anteile auf Grund der unterschiedlichen Zerlegungen des Ganzen nur indirekt möglich ist. Weiteres benötigtes mathematisches Wissen ist, je nach Argumentationsansatz, zudem Wissen über Zerlegungs-/Ergänzungsgleichheit, Deckungsgleichheit oder Eigenschaften der Operationen des Verdoppelns/Halbierens.
Argumentationsnormen (B2): In den Bearbeitungen von $N = 120$ Kindergartenkindern (zur Stichprobe vgl. Lindmeier et al., 2015) konnten induktiv Hinweise auf unterschiedliche Argumentationsnormen gewonnen werden. Neben mathematischen Argumentationen traten Begründungen mit Verweisen auf soziale Referenzrahmen (z.B. Bezug auf Gerechtigkeit, Alter) und individuelle Referenzrahmen (z.B. Bezug auf individuelle Werthaltungen) auf. Unter den Bearbeitungen, die einen mathematischen Referenzrahmen erkennen lassen, befinden sich zum einen vier Kategorien von aus normativer Sicht gültigen mathematischen Argumentationen (vgl. Tab. 1), zu anderen mathematische Argumentationen, die aus normativer Sicht nicht gültig sind. Unter den letzteren finde sich Hinweise auf sprachliche Schwierigkeiten im Umgang mit den komplexen Relationen ebenso wie Hinweise auf Schwierigkeiten im Erkennen relevanter Strukturen (z.B. Seitenlängen statt Flächen, Form statt Flächeninhalt).

Tabelle 1: Induktiv gewonnene Kategorien normativ gültiger mathematischer Argumentationen

Hälfte der Tafel	Kind erklärt/ zeigt, dass beide einen gleich großen Rest haben, weil sie je die Hälfte der vollen Tafel F1 gegessen/ übrig haben.
Zerlegung der Tafel	Kind erklärt/ zeigt, dass die volle Tafel F1 auf zwei Arten halbiert werden kann, quer oder längs.
Verdoppelung zu Tafel	Kind erklärt/ zeigt, dass beide Reste je zweimal in die volle Tafel F1 passen.
Ergänzung zu Tafel mit Umstrukturierung	Kind erklärt/ zeigt, dass ein Rest (F3) als Hälfte der vollen Tafel mit Hilfe des anderen Rests (F2) nach Umstrukturierung zur vollen Tafel F1 ergänzt werden kann
Umstrukturierung mit Deckungsgleichheit	Kind erklärt/ zeigt, dass einer der Reste durch Zertrennen und Aneinanderfügen zum anderen Rest deckungsgleich umstrukturiert werden kann.

Fazit

Der Beitrag illustriert über Beispielbearbeitungen von altersadäquaten Argumentationsanlässen Aspekte einer mathematischen Argumentationskultur im Kindergarten und ist in einem größeren Vorhaben der theoretischen Fundierung von mathematischem Argumentieren im Kindergarten zu verorten. Er zeigt, dass Kinder vielschichtig argumentieren und auch in der Lage sind, mathematische Argumentationen zu führen. Teilweise wird dabei eine Divergenz der Referenzrahmen sichtbar. Noch nicht betrachtet wurde bisher, welche Argumentationen auch in sozialen Prozessen im Kindergarten funktional sind, beispielsweise als Erklärung akzeptiert sind. In weitergehenden Untersuchungen soll dies entsprechend fokussiert werden.

Literatur

Baroody, A. J., Lai, M. L., & Mix, K. S. (2006). The development of young children's early number and operation sense and its implications for early childhood education. *Handbook of research on the education of young children, 2*, 187-221.

Jahnke, H.-N. & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In: R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik.* Heidelberg: Springer Spektrum.

Niklas, F., & Schneider, W. (2014). Casting the die before the die is cast: The importance of the home numeracy environment for preschool children. *European journal of psychology of education*, *29*(3), 327-345.

Stylianides, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65*, 1-20.

Lindmeier, A., Grüßing, M. & Heinze, A. (2015). Mathematisches Argumentieren bei fünf- bis sechsjährigen Kindern. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *BzMU 2015* (Bd. 1, S. 576–579). Münster: WTM.