

Prozessdatenanalysen: Darstellung von Brüchen

Im Projekt ALICE:Bruchrechnen wird untersucht, inwiefern sich moderne Ansätze zum Erwerb von Bruchrechnekompetenz mit einem digitalen Lehrbuch (iBook) für das iPad umsetzen lassen. Eine wichtige Rolle spielen dabei interaktive Aufgaben, die sich adaptiv an den Lernenden anpassen und Prozessdaten während der Bearbeitung erfassen.

Das Projekt ist eine Kooperation von zwei Lehrstühlen der Technischen Universität München und wird von der Heinz Nixdorf Stiftung unterstützt.

Darstellung von Brüchen

Moderne Ansätze zur Bruchrechendidaktik (Padberg & Wartha, 2017; Winter, 1999) fordern die Vermittlung von anschaulichen Grundvorstellungen (vgl. Malle, 2004). Das iBook fördert daher den Aufbau eines auch bildlichen Bruchzahlverständnisses und bietet in den Anfangskapiteln unterschiedliche Möglichkeiten, Bruchzahlen darzustellen.

Abb. 1 zeigt die Umsetzung von Aufgaben im iBook, wie sie zu Beginn des Bruchrechnenunterrichts gerne gestellt werden und bei denen Brüche als Teile von diskreten Mengen (Umranden von Objekten, vgl. Dienes, 1967) bzw. als teilweise markierte geometrische Figuren (Rechteck, Kreis) dargestellt werden sollen. Da in diesen Aufgabentypen das Ganze bereits passend vorunterteilt ist, führt einfaches Abzählen zum Ziel.



Abbildung 1: Vorunterteilte Aufgaben im iBook.

Abb. 2 zeigt die Darstellung eines Bruchs im Hybridmodell von Carraher (1993), das zum einen auf dem Verständnis von Verhältnissen, zum anderen auf dem Zahlenstrahl basiert. Dabei werden zwei Balken übereinander dargestellt, deren Längenverhältnis als Bruch anzugeben ist. Der Referenzbalken entspricht hier dem Intervall $[0; 1]$ und der zweite Balken einem Intervall $[0; \frac{n}{m}]$. Durch die Entfernung der Skalierung wird die Darstellung entarithmetisiert: Eine Lösung des Problems durch Abzählen ist nicht mehr möglich, vielmehr sollte eine korrekte Lösung verständnisbasiert erfolgen.



Abbildung 2: Darstellung eines Bruches im Hybridmodell (Carraher, 1993)

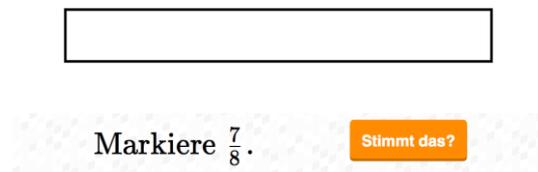


Abbildung 3: Umsetzung des Hybridmodells im iBook als interaktive Aufgabe

Das Hybridmodell wird im iBook sowohl für die Darstellung von Brüchen am Balken als auch am Kreis jeweils auf einem Intervall der Länge 1 umgesetzt (siehe Abb. 3). Dabei entspricht der Rahmen des Balkens, bzw. der volle Kreis dem Referenzbalken der festen Länge 1.

Erfassung von Prozessdaten

Die technische Umsetzung des Lehrbuchs geschieht in iBooks Author (Apple Inc., 2014), einer frei verfügbaren Gestaltungssoftware für digitale Bücher, sogenannte iBooks. iBooks Author bietet die Möglichkeit, maßgeschneiderte Interaktionen in das iBook einzubinden, die im Projekt größtenteils in CindyJS (von Gagern, Kortenkamp, Richter-Gebert & Strobel, 2016) implementiert werden. Durch die Eigenentwicklung bietet sich die Möglichkeit, Prozessdaten während der Aufgabenbearbeitung, wie Bearbeitungszeit, Fingerbewegungen und Lösungsraten, zu erfassen.

Prozessdaten sind für das Projekt von großem Interesse, da diese Daten Einblick geben, wie das iBook und seine interaktiven Elemente im Unterricht genutzt werden, ohne dass bei der Erhebung das Gefühl einer Testsituation aufkommt. Sie erlauben es auch, thematisch ähnliche Aufgaben auf Unterschiede zu untersuchen und so ihre Trennung im iBook zu rechtfertigen.

Forschungsfragen

1. Unterscheiden sich die im iBook eingesetzten Darstellungsaufgaben in ihren mittleren Lösungsraten und Bearbeitungszeiten?
2. Unterschieden sich die Aufgaben in den während des Lösungsprozesses aufgezeichneten Fingerbewegungen?

Methode

In den vorgestellten Darstellungsaufgaben wird die Zeit zwischen Anzeigen der Aufgabe und Einloggen des Ergebnisses (Bearbeitungszeit) und die Korrektheit der Eingabe (3% Fehlertoleranz in den kontinuierlichen Aufgaben) erfasst.

Der Analyse liegen die Prozessdaten aus den vorgestellten fünf Aufgaben von sechs Schulklassen (122 Schülerinnen und Schüler bearbeiteten alle fünf Aufgaben) aus fünf bayerischen Gymnasien zu Grunde, die im Rahmen einer Studie zu Beginn des Schuljahres 2016/17 erhoben wurden. Die Anzahl der ausgewerteten Aufgabenbearbeitungen beträgt 9061.

Da es freigestellt ist, wie oft die einzelnen Aufgaben bearbeitet werden, wurde zunächst für jede Schülerin bzw. Schüler die individuelle Lösungsrate bestimmt und anschließend aus diesen die mittlere Lösungsrate pro Aufgabe berechnet.

Zusätzlich werden in den nicht vorunterteilten Aufgaben die Fingerbewegungen der Schülerinnen und Schülern auf dem Touchscreen aufgezeichnet und als Listen von Punkten gespeichert. Dank gespeicherter Zeitstempel ist es anschließend möglich, den Lösungsprozess abzuspielen und zu beobachten.

Für die Analyse der Fingerbewegungen wurde eine der sechs Klassen (28 Schülerinnen und Schüler) betrachtet. Die insgesamt 642 Lösungsprozesse wurden einzeln betrachtet und anschließend zuvor anhand von Pilotierungsdaten festgestellten wiederkehrenden Lösungsmustern zugeordnet.

Ergebnisse und Diskussion

Es lassen sich mittlere Lösungsraten von über 92% in den passend vorunterteilten Aufgaben beobachten. Die beobachteten mittleren Lösungsraten in den nicht unterteilten Aufgaben sind deutlich niedriger und unterscheiden sich zwischen den beiden Aufgabentypen (Balken: 46%, Kreis: 64%). Diese deutlichen Unterschiede zwischen vorunterteilten/diskreten und entarithmetisierten Aufgabentypen decken sich mit der Erwartung, da in ersteren einfache Abzählstrategien zum Ziel führen.

In den mittleren Bearbeitungszeiten zeigen sich Unterschiede über alle Aufgaben hinweg. Sie liegen zwischen 4 und 9 Sekunden, teilweise treten aber hohe Schwankungen auf. Besonders auffallend ist der Unterschied in der Bearbeitungszeit vom Aufgabentyp *Umranden* zu den anderen vorunterteilten Aufgabentypen, der auf einen konzeptionellen Unterschied dieser Aufgabe hinweisen kann. Insgesamt zeigen die kurzen mittleren Bearbeitungszeiten, dass sich Darstellungsaufgaben mit Hilfe der Unterstützung durch das iPad sehr effizient in den Regelunterricht einbinden lassen.

Die gespeicherten Fingerbewegungen lassen wiederkehrende Bearbeitungsmuster erkennen. Insbesondere lassen sich *korrigierende* und *nicht-korrigierenden* Verfahren unterscheiden. Bei ersteren wird der gefragte Bruch mit Korrekturbewegungen gegen Ende der Bearbeitung markiert; bei zweiteren

wird die erste Eingabe als Lösung eingeloggt. Zusätzlich können im Lösungsprozess *Pausen* vorhanden sein. Besonders klar zu erkennen ist es, wenn die Schülerin bzw. der Schüler versucht, das Ganze eigenständig in gleich große Stücke teilen, deren Anzahl mit dem Nenner des zu markierenden Bruchs übereinstimmt.

Diese Bearbeitungsmuster können teilweise mit Lösungsstrategien in Verbindung gebracht werden: Pausen bei der Hälfte können auf einem impliziten Vergleich mit $\frac{1}{2}$ hindeuten. Die beobachtbare Unterteilung des Ganzen in gleich große Stücke lässt auf den Rückgriff auf eine Zählstrategie schließen.

Es fällt auf, dass die Schülerinnen und Schülern ihre Eingaben am Kreis – also dem Aufgabentyp mit der höheren Lösungsrate – weniger häufig korrigieren als am Balken. Auch wird seltener bei $\frac{1}{2}$ pausiert und man beobachtet bei keinem der 28 Schülerinnen und Schülern ein Unterteilen des Ganzen.

Insgesamt unterscheiden sich die nicht unterteilten Aufgaben (Balken und Kreis) in allen beobachteten Merkmalen (Lösungsrate, Bearbeitungszeit, beobachtete Lösungsmuster). Beim Markieren eines Bruchs in nicht vorunterteilten Figuren spielt die Form des zu markierenden Objektes offenbar eine erhebliche Rolle.

Abschließend ist zu sagen, dass Erhebung und Auswertung von Prozessdaten effizient umzusetzen ist, was interessante neue Fragestellungen in der mathematikdidaktischen Forschung eröffnen kann.

Literatur

- Apple Inc. (2017). *iBooks Author. Tolle Multi-Touch Bücher für das iPad erstellen und veröffentlichen*. Zugriff unter <https://www.apple.com/de/ibooks-author/>
- Carraher, D. W. (1993). Lines of thought: A ratio and operator model of rational number. *Educational Studies in Mathematics*, 25(4), 281–305. doi:10.1007/BF01273903
- Dienes, Z. P. (1967). *Fractions: An operational approach*. Harlow, Essex: Educational Supply Association.
- Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *Mathematik lehren*, 123, 4–8
- Padberg, F. & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung* (5. Aufl.). Heidelberg: Springer Spektrum. doi:10.1007/978-3-662-52969-0
- von Gagern, M., Kortenkamp, U., Richter-Gebert, J. & Strobel, M. (2016). CindyJS – Mathematical Visualization on Mobile Devices. In Greuel, G. M., Koch, T., Paule, P. & Sommese, A. *Lecture Notes in Computer Science* (pp. 319-326). Springer International Publishing. doi:10.1007/978-3-319-42432-3_39