

Der Vektorbegriff an der Schnittstelle zwischen Schule und Hochschule

Die Übergangsproblematik von der Schule in die Hochschule in Studiengängen mit Mathematikanteilen ist hinlänglich bekannt und verschiedene Konzepte zum Umgang damit werden entwickelt und erprobt (vgl. Bausch et al., 2014). Im Folgenden wird die Übergangsproblematik am Beispiel des Vektorbegriffs von einem inhaltlichen Standpunkt aus eingehender betrachtet und diskutiert.

Der Begriff des Vektors wird in der Schulmathematik im Zusammenhang mit der analytischen Geometrie eingeführt und dort überwiegend in geometrischen Kontexten verwendet (vgl. Bigalke & Köhler, 2012). Dazu gibt es vielfältige Möglichkeiten des Zugangs, z.B. Vektoren als (verschiebbare) Pfeile, Pfeilklassen oder Verschiebung(en). Zusätzlich zu den anschaulichen Repräsentationsformen wird für das Rechnen und Operieren mit Vektoren die abstraktere symbolische Schreibweise als Tupel verwendet. Zudem werden in der Schulphysik Vektoren schon in der Mittelstufe zur Beschreibung von Kräften eingeführt – allerdings auf eine an die Verwendung in der Physik angepasste Art und Weise (vgl. Bredthauer et al, 2011). Daraus kann man zu der Schlussfolgerung gelangen, dass die Schülerinnen und Schüler in ihrer Schullaufbahn vielfältige Zugänge zum Vektorbegriff kennenlernen.

All diese unterschiedlichen Repräsentationsmöglichkeiten und ein flexibler Umgang mit ihnen zum angemessenen situativen Problemlösen sind zu begrüßen, und es ist davon auszugehen, dass dies im Zusammenhang mit Vektoren gut gelingt und gefördert wird. Andererseits bringt eben diese Vielfalt auch die Herausforderungen im konsistenten Umgang mit der Mathematik mit sich, gerade am Übergang Schule/Hochschule, wo die Studienanfänger lernen müssen, Argumentationen konsistent auf Basis der eingeführten Definitionen zu führen. Es stellt sich somit die Frage, wie der Vektorbegriff in einem Vorkurs(-Lernmaterial) so eingeführt werden kann, dass dabei sowohl die heterogenen Vorkenntnisse der Studierenden berücksichtigt werden als auch eine inhaltlich konsistente Begriffsbildung stattfindet, die anschlussfähig an die Konzepte in den Vorlesungen des ersten Semesters ist. Als Ergebnis ist die Einführung in den Vektorbegriff im studiVEMINT Kurs entstanden.

Der Vektorbegriff von Studierenden im Vorkurs

Im Wintersemester 2016 wurde im Präsenzvorkurs der Universität Paderborn für Studienanfänger der Mathematik, Technomathematik, Informatik sowie des Lehramts für Gymnasien bzw. Berufskollegs eine Studie zum

Vektorbegriff durchgeführt (Mai, Feudel, Biehler, eingereicht). Unter anderem wurden die Studierenden gefragt: „Was ist ein Vektor?“. Abbildung 1 zeigt die Bandbreite der studentischen Antworten, wobei die farbliche Kodierung in grün, gelb und rot (von links nach rechts) eine grobe Einschätzung darstellt, inwieweit sich der in der Kategorie erfasste Vektorbegriff in die Theorie der Vektorräume einbetten lässt.

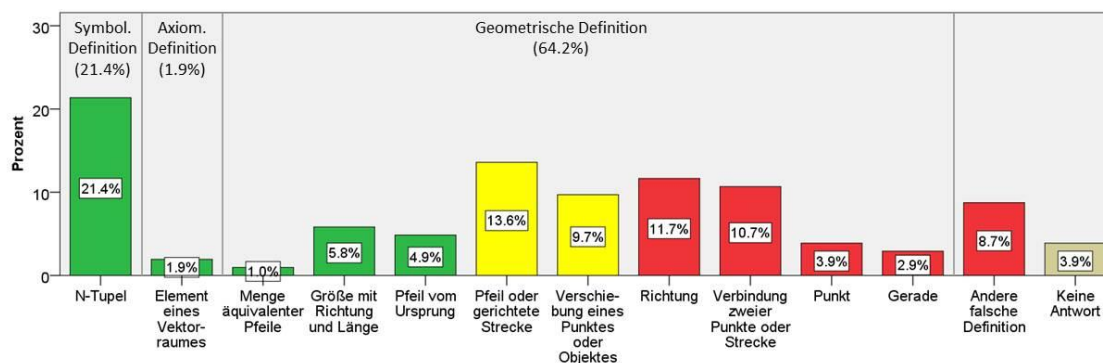


Abbildung 1: Antworten der Studenten auf die Frage „Was ist ein Vektor“? (n=103)

Es fällt auf, dass von der überwiegenden Zahl der Studenten (64,2%) Antworten mit einem geometrischen Zugang gegeben werden. Viele der angegebenen geometrischen Vorstellungen erfassen das Konzept jedoch nur unvollständig (z.B. die Auffassung als einzelner Pfeil oder als Verschiebung eines Punktes im Raum). Ein weiterer nennenswerter Anteil (21,4%) beschreibt einen Vektor als Tupel. Insgesamt zeigt sich die Vielfältigkeit der Vorstellungen zum Vektorbegriff, über die Studierende verfügen. Inwiefern die Studierenden über verschiedene weitere Vorstellungen verfügen und sich ihrer Zusammenhänge bewusst sind, müsste Gegenstand weiterer Untersuchungen werden.

studiVEMINT

Die nachfolgend vorgestellte Einführung in den Vektorbegriff ist ein Kursabschnitt aus dem studiVEMINT Kurs und unter www.studifinder.de bzw. www.studiport.de verfügbar. Nachdem das Land Nordrhein-Westfalen durch das Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Innovation die Plattform Studifinder zur Unterstützung von Schülerinnen und Schülern auf dem Weg zu einem Studium in Nordrhein-Westfalen entwickelt hat, ist zusätzlich am 3. November 2016 das Studiport eröffnet worden. Studiport ist ein Online-Portal zur Begleitung von Studienanfängern in der Studieneingangsphase. Ein Unterstützungsangebot für den Bereich Mathematik, welches sich in beiden Portalen wiederfindet, ist der Onlinekurs studiVEMINT, welcher Lerneinheiten zu 13 Wissensbereichen anbietet. Hier wird die Schulmathematik auf einem Niveau zwischen Schule und Hochschule auf-

bereitet, sodass Studienanfänger nach Bedarf für das Studium relevante Mathematikkenntnisse in einer für die Hochschule anschlussfähigen Form auffrischen und wiederholen können.

Ein Vorschlag zur Einführung des Vektorbegriffs im Vorkurs

Zu Beginn einer Einführung in den Vektorbegriff stellt sich – spätestens nach einer Hinführung an das Konzept – die Frage, wie ein Vektor definiert werden soll, denn dazu gibt es verschieden Wege (vgl. Henn & Filler, 2015). Wie eingangs beschrieben geben Studenten zu Beginn ihres Studiums des Öfteren eine geometrische Vorstellung im Zusammenhang mit dem Vektorbegriff an. Zugleich werden Vektoren von den Studierenden häufig als Tupel beschrieben.

Geometrisch-anschauliche Definitionen können ein hohes Abstraktionsniveau erreichen – etwa die Definition eines Vektors als Pfeilkategorie. In unserer Einführung haben wir uns dafür entschieden, dass wir einen Vektor als 2-Tupel bzw. 3-Tupel mit Komponenten, die reelle Zahlen sind, definieren. Diese Definition sollte als Grundlage für eine darauf bezogene, konsistente Begriffsbildung dienen. Sie ist später auf höhere Dimensionen leicht erweiterbar und der Bezug zur Geometrie ist als Verbindungsvektor zweier Punkte herstellbar. Verbindungsvektoren zweier Punkte werden als Pfeil zwischen diesen Punkten dargestellt, wobei explizit darauf hingewiesen wird, dass jeder Pfeil genau einem Tupel zugeordnet wird, während einem Tupel beliebig viele (geeignete) Pfeile zugeordnet werden.

Auf dieser Grundlage haben wir im Lernmaterial alle weiteren Aspekte des Vektorbegriffs (u.a. Addition, Subtraktion, Gegenvektor, Nullvektor, ...) ausgehend von der Definition als Tupel im Lernmaterial eingeführt. Der vom Tupel ausgehende Aufbau vermeidet insbesondere Erklärungen über die Unabhängigkeit von der Wahl der Repräsentanten in vielen Fällen oder das Problem der geometrischen Darstellung des Nullvektors. Trotzdem wurden durch die Betrachtung von Verbindungsvektoren und ihren Pfeilrepräsentationen durchgehend geometrische Beispiele und Veranschaulichungen angeführt. Viele Begriffe lassen sich plausibel auf der symbolischen Ebene einführen (z.B. die Addition von Vektoren). Bei anderen Begriffen, etwa dem Betrag eines Vektors oder dem Winkel zwischen zwei Vektoren, gelingt dies weniger. Hier kommt der geometrischen Veranschaulichung zusätzlich eine sinnstiftende, motivierende Rolle zu, obgleich die Definition von Betrag und Winkel letztlich anhand der Vektordefinition als Tupel erfolgt, um den konsistenten Aufbau des Lernmaterials auch an dieser Stelle zu wahren.

Fazit

Das Zusammenspiel von Geometrie und Formalismus hat für den Vektorbegriff eine besondere Bedeutung. In unserer Einführung haben wir uns mit den dargelegten Argumenten unter Berücksichtigung des Vorwissens der Studierenden für die symbolische Einführung als Tupel entschieden, aber stets auch den Bezug zur Veranschaulichung gesucht. Spätestens der Betrag eines Vektors verdeutlicht, dass der Bezug zur Geometrie für einen verständnisorientierten Aufbau des Lernmaterials von zentraler Bedeutung ist. So gelingt die mathematisch konsistente Einführung des Vektorbegriffs als Tupel, ohne auf die Vorzüge von Veranschaulichungen zu verzichten.

Literatur

- Bausch, I.; Biehler, R.; Bruder, R.; Fischer, P.; Hochmuth, R.; Koepf, W.; Schreiber S.; Wassong, T. (Hrsg.) (2014): *Mathematische Vor- und Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Bigalke, A. & Köhler, H. (2012). *Mathematik Gymnasiale Oberstufe*, Nordrhein Westphalen, Leistungskurs. Berlin: Cornelsen.
- Bredthauer, W. et al. (2011). *Impulse Physik Mittelstufe*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.
- Colberg, C.; Mai, T.; Wilms, D. & Biehler, R. (2017). Studifinder: Developing e-learning materials for the transition from secondary school to university. In Göller, R., Biehler, R., Hochmuth, R., Rück, H.-G. (Hrsg.): *Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline – Conference Proceedings* (S. 462-465). Kassel: Universitätsbibliothek Kassel.
- Henn, H.-W. & Filler, A. (2015). *Analytische Geometrie Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra*. Heidelberg: Springer.
- Mai T.; Feudel F. & Biehler R (2017). *A vector is a line segment between two points? - Students' concept definitions of a vector during the transition from school to university*. Manuskript zur Veröffentlichung eingereicht.
- Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit Vektoren. *Mathematik Lehren*, 133, 16-19.
- Watson, A.; Spyrou, P. & Tall, D. (2003). The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: The concept of vector. *The Mediterranean Journal of Mathematics Education*, 1(2), 73-97.