Jan BLOCK, Technische Universität Braunschweig / Gaußschule Braunschweig, DE

Aufgabenformate zur Förderung des Erkennens von Strukturen im Kontext algebraischen Denkens

Das Lernen im Mathematikunterricht wird in erheblichem Maße durch das Bearbeiten von Aufgaben gesteuert. Im Vordergrund steht dabei meist das Lösen einer konkreten Aufgabe. Anders als bei komplexen Modellierungs- oder Problemlöseaufgaben steht bei verfahrens- bzw. routineorientierten Aufgaben wie dem Lösen einer (quadratischen) Gleichung, der Addition zweier Brüche oder dem Lösen eines linearen Gleichungssystems das Bestimmen der meist eindeutigen Lösung ohne weitere Reflexion des Vorgehens im Mittelpunkt. Beim Bearbeiten kalkülgeprägter Routineaufgaben aus dem Bereich der Arithmetik oder der Algebra in den Sekundarstufen gibt es aber häufig verschiedene Bearbeitungswege, die von den spezifischen Aufgabenmerkmalen abhängig und bezüglich des Rechenaufwands und der Fehleranfälligkeit unterschiedlich effizient sind. Zur Illustration ein Beispiel aus einer Abiturprüfung: Zu bestimmen sind die Nullstellen der Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = -ax(x-a)$. Diese sind direkt und ohne weitere Rechnung ablesbar, wenn die Struktur des Funktionsterms erkannt und die Nullteilerfreiheit des Körpers der reellen Zahlen berücksichtigt wird. Nicht wenige Schüler haben beim Lösen der Gleichung $-ax(x-a) = 0$ aber zunächst ausmultipliziert und anschließend x ausgeklammert oder die nach dem Ausmultiplizieren entstehende quadratische Gleichung mithilfe der pq-Formel (häufig fehlerhaft) bearbeitet. Der effiziente Umgang mit Routineaufgaben und der flexible Einsatz unterschiedlicher Lösungsverfahren erfordert ein Erfassen der Aufgabe mit ihren spezifischen Merkmalen und deren Bedeutungen für den Lösungsprozess und die Lösungen. Beim flexiblen Rechnen in der Primarstufe soll der Zahlenblick helfen, „verallgemeinernde Aspekte in Situationen zu erkennen, Strukturähnlichkeiten zwischen bereits gelösten und neuen Aufgaben zu entdecken und strategische Vorgehensweisen zu übertagen“ (Schütte 2008, 103). „Eine Kernidee des qualifizierten Mathematikunterrichts [in der Grundschule, J. B.] lautet: Man kann mathematisches Denken nutzen, um sich das Rechnen zu erleichtern“ (Schütte 2008, 123). Diese Kernidee lässt sich auf kalkülorientierte Routineaufgaben aus der Arithmetik und der Algebra in den Sekundarstufen übertragen.

Die notwendige Verdichtung des Wissens zum Ablauf von Routinen führt häufig dazu, dass die Berichtbarkeit dessen, was getan wird, im Laufe des Übens von Routinen immer mehr verloren geht (Schlöglmann 2005). Damit einhergehend rückt die bewusste Wahrnehmung spezifischer Aufgabenmerkmale in den Hintergrund. Das Lösen von Routineaufgaben erfordert zwar die Wahrnehmung der spezifischen Aufgabenmerkmale, stellt diese

Wahrnehmung aber nicht explizit in den Mittelpunkt des Lernprozesses. Hierzu bedarf es geeigneter Aufgabenstellungen, die die Schülerinnen und Schüler konkret hierzu auffordern. Bekannt sind Aufgabenformate wie „Finde den Fehler und berichtige.“ oder „Lisa hat die Gleichung so gelöst. Was meinst du dazu?“. Diese Aufgabenstellungen auf der Metaebene beziehen sich jeweils nur auf eine konkrete Aufgabe bzw. deren Lösung. Die Wahl geeigneter Bearbeitungsstrategien für Routineaufgaben hängt aber wesentlich vom Erfassen der Gemeinsamkeiten und Unterschiede verschiedener Aufgaben sowohl hinsichtlich der auftretenden Zahlen als auch der Strukturen der Terme und Gleichungen ab. Daraus resultiert, dass Aufgabenformate, die auf die Merkmale von Aufgaben gerichtet sind, sich in der Regel nicht auf einzelne Aufgabe beziehen sollten, sondern auf eine Menge oder eine Sequenz von Aufgaben, die in einem Zusammenhang stehen, der für den Lernenden erkennbar sein muss. Aufgabenstellungen, die sich auf eine Menge oder Sequenz von Aufgaben (als Primäraufgaben bezeichnet) beziehen, die in einem für den Lernenden erkennbaren Zusammenhang stehen, können als Metaaufgaben bezeichnet werden. Der Zusammenhang zwischen den Primäraufgaben muss dadurch gegeben sein, dass diese einerseits Gemeinsamkeiten aufweisen, andererseits aber auch Unterschiede. Die Gemeinsamkeit kann sich auf einen gemeinsamen Kontext (z. B. lineare Gleichungen) oder auf ein gemeinsames Merkmal (z. B. eine Menge von Gleichungen unterschiedlichen Typs mit leerer Lösungsmenge) beziehen. Die Metaaufgaben konzentrieren sich dann auf der Basis der Gemeinsamkeiten der Primäraufgaben insbesondere auf die Auseinandersetzung mit den Unterschieden. Metaaufgaben können somit dazu beitragen, ein auf die Routinen bezogenes Nachdenken über die zu bearbeitenden Aufgaben anzuregen und relevante Merkmale und Strukturen im Kontext algebraischen Denkens zum expliziten Unterrichtsgegenstand zu machen.

Typen von Metaaufgaben			
analysieren	sortieren	nach selbst zu formulierenden Kriterien	divergent
		nach vorgegebenen subjektiven Kriterien	
		nach vorgegebenen objektiven Kriterien	
	beschreiben	einer vorgelegten Sortierung in Gruppen	
		einer vorgelegten Sortierung in einer Reihenfolge	konvergent
generieren	erfinden	als Fortsetzung einer vorgegebenen Reihenfolge	
		in einem vorgegebenen fachlichen Kontext	
	variieren	ausgehend von einer Initialaufgabe	divergent

Tabelle 1: Typen von Metaaufgaben

Tabelle 1 zeigt eine Klassifizierung verschiedener Typen von Metaufgaben im Sinne obiger Definition sowie deren Einordnung bzgl. des Grads an Konvergenz bzw. Divergenz hinsichtlich Bearbeitungsweg und Bearbeitungsergebnis. Bei den analysierenden Metaaufgaben ist die Menge der Primäraufgaben vorgegeben. Bei den generierenden Metaaufgaben wird die Menge der in Beziehung zueinander stehenden Aufgaben erst durch die Metaaufgabe erzeugt.

Exemplarisch wird folgend auf das Variieren von Aufgaben eingegangen. Eine ausführliche Konzeption hierzu hat Schupp (2002) vorgelegt. Die Auseinandersetzung mit sogenannten „Aufgabenfamilien“, die man durch Variation einer Ausgangsaufgabe erhält, hat auch Walsch (1995) gefordert. Als mögliche Effekte nennt Walsch die daraus erwachsende Vernetzung von Aufgaben und deren Ergebnissen z. B. durch die Frage nach der Wirkung der Veränderung gegebener Daten und die Möglichkeit des Vergleichens von Ergebnissen von Einzelaufgaben, denen dadurch eine Bedeutung zukommt, die sie bei singulärer Bearbeitung einer Einzelaufgabe nicht gehabt hätten. Loska und Hartmann (2005) sehen in der Variation von Aufgaben innerhalb eines bestimmten Systems die Möglichkeit, bewusst die vorhandenen Analogien zu anderen Systemen aufspüren zu können. Variationen bieten somit ein hohes Potenzial für die Auseinandersetzung mit den Strukturen und Merkmalen der Initialaufgabe und der Wirkung von Veränderungen. Anhand ausgewählter Beispiele zur Variation eines linearen Gleichungssystems wird dies verdeutlicht.

Die Variation der Koeffizienten eines linearen Gleichungssystems (LGS) mit zwei Gleichungen und zwei Variablen wirkt sich auf die Auswahl eines effizienten Verfahrens zur Lösung (Additions-, Einsetzungs- oder Gleichsetzungsverfahren) und auf die Lösungsmenge aus (Beispiele in Tabelle 2). Die Aufgabenstellung kann durch entsprechende Formulierungen auf diese Variationen hin explizit ausgerichtet werden (Tabelle 3).

	Wirkungsaspekte			
Initialaufgabe	Lösungsverfahren		Lösbarkeit und Lösungsmenge	
	Einsetzung	Gleichsetzung	keine Lösung	unendlich viele Lösungen
$2x+3y=4$ $-x+y=-3$	$2x+3y=-4$ $x-2y=3$	$2x+3y=-4$ $2x-2y=3$	$2x+3y=-4$ $2x+3y=3$	$2x+3y=-4$ $4x+6y=-8$

Tabelle 2: Beispiele zur Variation der Koeffizienten eines LGS

Wirkungsaspekt	*Zielgerichtete Aufgabenstellung*
Lösungsverfahren	Variiere das LGS so, dass es sich gut mit dem …-verfahren lösen lässt.
Lösbarkeit und Lösungsmenge	Variiere das LGS so, dass die Lösungsmenge leer ist. Variiere das LGS so, dass die Lösungsmenge unendlich viele Elemente enthält.

Tabelle 3: Aufgabenstellungen für zielgerichtete Variationen eines LGS

Eine differenzierende Aufgabenstellung zu einem zielgerichteten Variationsauftrag wie in Tabelle 3 kann durch die folgenden drei Typen von Arbeitsaufträgen realisiert werden: 1. Finde eine Variation, sodass… 2. Finde weitere Variationen, sodass… 3. Finde alle Variationen, sodass… Der dritte Typ erfordert eine intensive Auseinandersetzung mit den Strukturen des LGS unter Verwendung der algebraischen Symbolsprache.

	Wirkungsaspekte			
Initialaufgabe	• Art der Lösungsmenge • Lösungsverfahren	• semantische Bedeutung • Lösungsverfahren • Lösbarkeit und Lösungsmenge		
$2x+3y=4$ $-x+y=-3$	$2x+3y>4$ $-x+y>-3$	$2x\cdot 3y=4$ $-x+y=-3$	$2x+3y=4$ $-x+z=-3$	$2x^2+3y^2=4$ $-x^2+y^2=-3$

Tabelle 4: Weitere Variationsmöglichkeiten und Wirkungsaspekte

Tabelle 4 zeigt weitere Möglichkeiten der Variation des LGS und die durch die strukturelle Veränderung beeinflussten Aspekte. Diese Variationen zeigen insbesondere das Potenzial von Aufgabenvariationen durch die Schülerinnen und Schüler bezüglich der Herstellung von Bezügen zu übergeordneten Aspekten algebraischer Strukturen und ihrer semantischen Bedeutungen. Um deren Erfassung anschaulich zu machen, können sie mithilfe geeigneter Technologien sichtbar gemacht werden, indem die Gleichungen bzw. Ungleichungen grafisch dargestellt werden. Möglicherweise treten hierbei auch Sachverhalte auf, die mit den jeweils zur Verfügung stehenden Möglichkeiten der Schülerinnen und Schüler nicht weiter durchdrungen werden können. Diese können dann im späteren Verlauf des Lernprozesses wieder aufgegriffen werden. Auch die Frage nach der Auswahl bekannter Lösungsverfahren bzw. deren Adaption in neuen Kontexten ergibt sich durch diese Variationen.

Literatur

Loska, R. & Hartmann, M. (2005): Bedeutung der Variation von Übungsformaten. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005*. Hildesheim: Franzbecker, 352–355.

Schlöglmann, W. (2005). Fehler beim Lösen von Nichtroutineaufgaben. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005*. Hildesheim: Franzbecker, 509-512

Schütte, S. (2008). *Qualität im Mathematikunterricht der Grundschule sichern.* Für eine zeitgemäße Unterrichts- und Aufgabenkultur. München: Oldenbourg.

Schupp, H. (2002). *Thema mit Variationen.* Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker.

Walsch, W. (1995): Aufgabenfamilien. Beispiele und didaktische Anmerkungen. Folge 1. *Mathematik in der Schule 33, Heft 2,* 78–82.