Michael MARXER, Pädagogische Hochschule Freiburg, DE

Formeln verstehen – oder: Nach welchen Kriterien weist man Variablen ihren Platz zu?

Wer erfahren will, was Algebra leistet, muss verstehen, unter welche Aspekten eine Variable gesehen werden kann, wie sie mit anderen Variablen verknüpft ist und warum sie an einer bestimmten Stelle des Terms steht. Wenn im Mathematikunterricht neben der Orientierung am sicheren Kalkül das Verständnis für den Aufbau eines Terms oder einer Formel tritt, wird die Grundlage dafür geschaffen, dass Schüler diese nicht nur anwenden, sondern auch – z.B. aufgrund veränderter Voraussetzungen oder Einflussgrößen - modifizieren können. Ein wichtiges Ziel des Algebra-Unterrichts ist es, die Fähigkeit zu schulen, in einer Situation die Struktur zu erfassen und diese in einem algebraischen Term abzubilden.

Ein Beispiel zur Erläuterung: Heinz Heckhausen (1980) hat eine Motivationsformel entworfen, die hier – etwas zurechtgestutzt – dargestellt werden soll. Als Einflussgrößen für die Motivation (M), eine gestellte Aufgabe anzugehen, werden betrachtet: die individuelle Leistungsbereitschaft des Individuums (LM), der Erreichbarkeitsgrad der Aufgabe (E) und der Anreiz der Aufgabe (Ae).

Heckhausen konstruiert nun folgende (hier verkürzt dargestellte) Formel:

$$M = LM \cdot E \cdot Ae$$

Warum verwendet Heckhausen zur Berechnung von M ein Produkt und begnügt sich nicht mit der Bildung der Summe? Offensichtlich werden die Zusammenhänge der Wirklichkeit durch dieses Produkt besser dargestellt als durch eine Summe. Wenn beispielsweise der Erreichbarkeitsgrad einer Aufgabe gleich Null ist, so ist die Motivation trotz hoher individueller Leistungsbereitschaft LM ebenfalls gleich Null. Bei additiver Verknüpfung der Einflussgrößen käme dies nicht zum Ausdruck. Dasselbe trifft für die anderen Variablen zu, die Darstellung als Produkt bewirkt, dass jede einzelne Einflussgröße zum „K.O.-Kriterium" für die Motivation M werden kann.

Geschult werden können solche Fähigkeiten, in Termen die Struktur zu sehen, schon lange bevor das Stichwort „Algebra" fällt und auch dann, wenn der Begriff „Variable" noch nicht mit einer (mathematischen) Bedeutung verknüpft ist. Bereits in der Primarstufe erfassen Schüler Phänomene der Verallgemeinerung, sie haben lediglich noch keine „Sprache" dafür. Beispielsweise wird die Erkenntnis, dass 3 + 4 = 4 + 3 gilt, weder als Kommutativgesetz bezeichnet, noch algebraisch notiert. Aber es wird intuitiv erfasst, dass dies wohl für alle Zahlen gilt, die addiert werden. Vorerfahrungen mit

Verallgemeinerungen, bei denen die verwendeten Zahlen als Stellvertreter für *alle* möglichen Zahlen gelten, helfen dabei, in höheren Klassen die Verwendung von Buchstaben für Variable im Sinne des Aspekts „Veränderliche“ zu begreifen. In der Primarstufe verwendete Aufgabenformate sollten diese Verständnisebene immer wieder ermöglichen und herausfordern.

In der Sekundarstufe kommen weitere Möglichkeiten – zunächst immer noch auf der Zahlenebene – hinzu. Ein Beispiel soll die Möglichkeiten aufzeigen:

Fünf Freunde planen einen Ausflug nach Hamburg.

Benzinkosten (PKW mit max. 5 Personen) 120 €	Eintritt Modelleisenbahnausstellung 8 € pro Person

Kosten pro Person [in €]: $\frac{120}{5} + 8$

(a) Was ändert sich, wenn die Benzinkosten auf 130 € steigen?

(b) Was ändert sich, wenn zwei Freunde krank werden?

(c) Was ändert sich, wenn insgesamt sechs Freunde mitfahren?

(d) Was ändert sich, wenn es in der Ausstellung eine Gruppenkarte zu 36 € für bis zu sechs Besucher gibt?

(e) Mit welchem Term kann man die Gesamtkosten für alle ausrechnen?

Eine Änderung an der Sachsituation macht also weitere Überlegungen erforderlich:

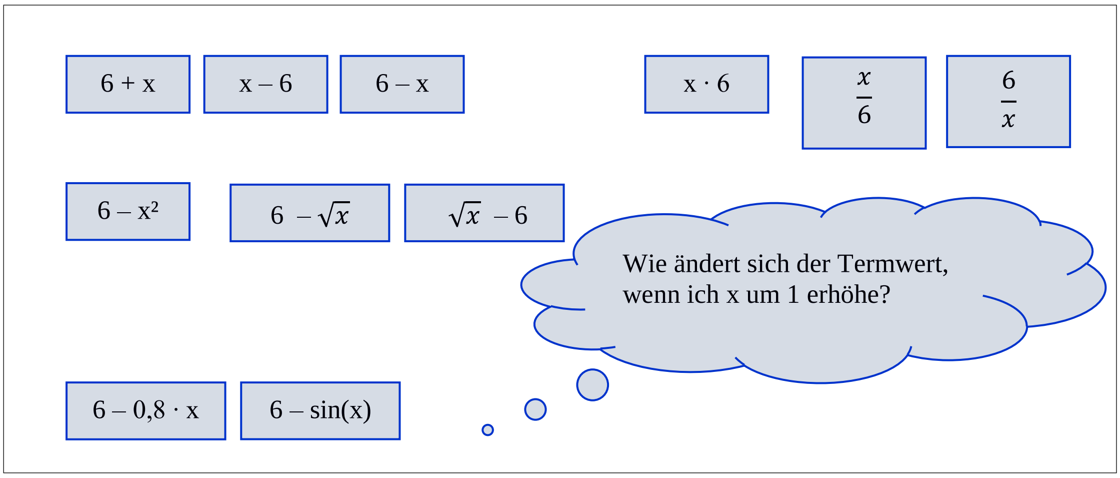
- An welcher Stelle des Terms muss ein Zahlenwert geändert werden?
- Führt diese Änderung zu einer Erhöhung oder einer Verminderung des Termwertes (d.h.: des Funktionswertes)?
- Genügt die Änderung eines einzelnen Wertes oder muss der gesamte Term neu strukturiert werden?

Eine neue Sichtweise auf Terme rückt in den Vordergrund: Der einer (veränderlichen) Zahl zugewiesene *Platz* legt fest, wie sich eine Veränderung dieser Zahl auf den Termwert auswirkt.

$\frac{x}{5} + 8$ $\qquad$ $\frac{120}{x} + 8$ $\qquad$ $\frac{120}{5} + x$

Dabei wird die Semantik von Termstrukturen erfasst: „Warum steht die Anzahl der Personen im Nenner, warum stehen die Benzinkosten im Zähler? Wieso schreibt man die Kosten für den Eintritt nicht in den Zähler des Bruchs, sondern als weiteren Summanden dahinter?“ Teilaufgabe (c) muss mit Vorsicht beantwortet werden: Bevor ein Automatismus bei der Bearbeitung einsetzen könnte, muss über die Gültigkeit des Terms neu nachgedacht werden. Im Modellierungskreislauf sind derartige Überlegungen dem Teilschritt „Validierung“ zuzuordnen (Maaß 2007).

Der durch die Variation bei Zahlentermen vertraute Blick auf die Auswirkungen beim Termwert bildet die Grundlage für die Betrachtung algebraischer Terme unter dem Kovariationsaspekt. Abhängig vom „Platz“, an dem die Variable innerhalb eines Terms steht, ergeben sich ganz unterschiedliche Auswirkungen auf den Wert des Terms, wenn für x unterschiedliche Zahlen eingesetzt werden.



Zunächst kann der Vergleich der Terme auf die Fragestellung eingegrenzt werden: „Wird der Termwert größer oder kleiner, wenn x um 1 erhöht wird?“ Anspruchsvoller wird die Betrachtung, wenn untersucht wird, bei welchen Termen die Zu- oder Abnahme vergleichsweise „schneller“ oder „andersartig“ geschieht. Graphische Darstellungen können die Überlegungen unterstützen und legen die Grundlage für die Arbeit mit Funktionen.

Besonders einsichtig wird der Aufbau einer Formel immer dann, wenn sich der Zusammenhang leicht an der Realität überprüfen lässt. MALLE (1993) führt hier als Beispiel die Formel für den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit, Zeit und zurückgelegter Strecke an:

$$t = s / v$$

Leicht wird durch die Realität einsichtig, dass ein größerer Wert für s (bei gleichbleibender Geschwindigkeit) zu einer längeren Fahrzeit führt, wogegen bei einem größeren Wert für v das Ziel in kürzerer Zeit erreicht wird. Reguliert wird dieser funktionale Zusammenhang durch die Positionierung der Variablen im Zähler bzw. Nenner. Natürlich stellt diese vorläufige Beschränkung auf proportionale Zusammenhänge eine starke Vereinfachung dar, gleichwohl wird der Blick auf den Aufbau einer Formel geschärft.

Formeln anzuwenden mag in vielen Fällen genügen. Die Modifizierung von Formeln bekommt jedoch – insbesondere in der immer bedeutender werdenden Welt der automatisierten Bearbeitung von Standardrechnungen – einen zunehmenden Stellenwert. Mathematikunterricht sollte darauf durch entsprechende Aufgabenformate vorbereiten.

Literatur

Barzel, Bärbel & Herget, Wilfried: Zahlen, Symbole, Variablen – abstrakt und konkret. *Mathematik lehren, Heft 136, Juni 2006*

Steinweg, Susanne: *Algebra in der Grundschule. Springer Spektrum*, Heidelberg 2013

Akinwunmi, Kathrin: *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster.* Springer Spektrum, Wiesbaden 2012

Malle, Günther: *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Vieweg u. Sohn, Braunschweig/Wiesbaden 1993

Marxer, Michael: Arithmetisches Modellieren – Vorerfahrungen zu Variablen und Termen ermöglichen. *Mathematik lehren 171, April 2012*

Barzel, Bärbel & Hußmann, Stefan & Leuders, Timo & Prediger, Susanne (2013)**:** *Handreichungen mathewerkstatt 6.* Cornelsen-Verlag S. 211 – 254

Prediger, Susanne & Barzel, Bärbel & Hußmann, Stefan & Leuders, Timo (2013): *mathewerkstatt 6.* Cornelsen-Verlag. S. 101 – 122

Leuders, Timo & Prediger, Susanne & Barzel, Bärbel & Hußmann, Stefan (2014): *mathewerkstatt 7.* Cornelsen-Verlag. S. 165 – 194