Hans-Joachim BRENNER, Albert-Schweitzer-Gymnasium Erfurt, DE

Zur Bestimmung von elementarmathematischen Inhalten für regionale Fortbildungsveranstaltungen

1. Regionale Fortbildungsveranstaltungen

Die Förderung von Reflexions- und Lernprozessen ist ein wesentliches Ziel und gleichzeitig ein wichtiges Merkmal von regionalen Fortbildungsveranstaltungen. Regionale Fortbildungen werden von FachberaterInnen zu unterschiedlichen Problemen des Unterrichts und der Schulmathematik auf traditionelle Art durchgeführt: Vortrag und Meinungsaustausch wechseln fließend einander ab. Zur Bestimmung von elementar- und schulmathematischen Inhalten sind gründliche Analysen des Professionswissens der LehrerInnen und die Herausarbeitung von wesentlichen und typischen Merkmalen erforderlich. Auf dieser Grundlage gilt es, elementarmathematische Aussagen von großer Beziehungshaltigkeit und Wichtigkeit für den inneren Aufbau der Elementarmathematik und ihren Verbindungen zur „höheren" Mathematik herauszuarbeiten und zu diskutieren. In der Fortbildung sollen innovative Erfahrungen – Differenzerfahrungen – ermöglicht werden, um (hoffentlich) Lernhandlungen zu initiieren.

2. Theoretischer Rahmen

Die grundlegenden Auffassungen, welche Ziele mit einer Fortbildungsveranstaltung verfolgt werden, welchem Zweck sie dienen und welchen Interessen entsprochen werden soll und schließlich, worin die erwarteten Kompetenzzuwächse und ihre unterrichtliche Wirksamkeit bestehen mögen, unterlagen in den letzten fünfzig Jahren beständigen Veränderungen. Törner [Törner 2015] nennt in zeitlicher Abfolge acht Paradigmen von Lehrerfortbildung. Das heute vorherrschende Paradigma kann als „Continuous professional development" zusammengefasst werden. Man geht davon aus, dass die Verantwortung für die persönliche berufliche Entwicklung in den Händen der Lehrpersonen selbst liegt und dass diese Entwicklung ein Prozess ist, der die gesamte berufliche Laufbahn durchzieht. Dieses Paradigma umfasst: *das Nachladen,* d.h. das Vertrautmachen mit in der früheren Lehrerausbildung nicht vermittelten unterrichtlichen Inhalten; *Teacher change*, d.h. der Lehrer mit seinem mathematischen Weltbild, seinen epistemologischen Überzeugungen und seinen unterrichtlichen Routinen soll ‚verändert' werden; *Lehrerfortbildung = Alltag im Mathematikunterricht*. Das letzte Paradigma gipfelt in der Feststellung Tenorths, dass „der eigentlich maßgebliche und vorherrschende Ort der Lehrerfortbildung der eigene Unterricht ist". [ebd., S. 209] Törner zitiert weiterhin Oelkers, der ‚professional development' als wesentlichen Teilbereich der Personalentwicklung definiert und dass „sich die fortlaufenden Anpassungen des Wissens und der Fähigkeiten der Lehrkräfte am besten mit einer Mischung aus Weiterbildung und Selbstinstruktion erreichen lässt“. [ebd., S. 210] Da der zeitliche Rahmen von Fortbildungsveranstaltungen sehr beschränkt ist, besteht ein wesentliches Anliegen darin, zum selbstgesteuerten Lernen anzuregen.

Die Notwendigkeit eines ‚Nachladens‘ relativiert Törner, indem er das Attribut ‚erforderlich‘ in Klammern setzt. Offenbar unterschätzt er die Relevanz von Fortbildungen auf dem Gebiet der Elementarmathematik. Dies ist in Zeiten der Einschränkung und Trivialisierung der Schulmathematik weniger auffällig, weil man die Wirkungen auf LehrerInnen nicht bemerkt oder ignoriert.

Ein Merkmal der von mir durchgeführten regionalen Fortbildungsveranstaltungen bestand in der Behandlung von in der Lehrerausbildung nicht oder nur eingeschränkt vermittelten elementarmathematischen Inhalten. Dabei erfassen die Teilnehmerinnen und Teilnehmer mathematische Eigenschaften und Zusammenhänge zwar hauptsächlich analytisch - wie ein Novize, aber die Einordnung des zu Lernenden hinsichtlich der unterrichtlichen Bedeutung erfolgt ganzheitlich, intuitiv und aus verschiedenen Perspektiven - also als Experte. (Neuweg 2004) Als Fortbildner muss man lernen, sich in diesem Spannungsfeld zu bewegen. Das gelingt natürlich in unterschiedlichen Maßen - auch innerhalb einer Veranstaltung. Das führt zum direkten Eingreifen, Nachfragen und Beurteilen durch die TeilnehmerInnen und zu einer inneren Dynamik – die Veranstaltung gelingt.

3. Analyse des Professionswissens der Lehrkräfte in Thüringen

Auf der Grundlage von Untersuchungen und Beobachtungen können wesentliche Facetten der professionellen Kompetenz *erfahrener* Lehrerinnen und Lehrer Thüringens wie folgt beschrieben werden. (1) Der Mathematikunterricht als sozialer Prozess wird erfolgreich gestaltet. (2) Professionelles Handeln im Rahmen der Schulmathematik - Schülerinnen und Schüler werden engagiert und erfolgreich auf zentrale Tests und Abschlussprüfungen vorbereitet. (3) Die Begrenztheit der Schulmathematik führt zu Wissenslücken und zu beschränkten Fähigkeiten auf dem Gebiet der Elementarmathematik. (4) Kritiklosigkeit gegenüber Aufgaben zentraler Prüfungen. (5) Eine Verbindung zur Hochschulmathematik und zur Mathematik als Wissenschaft ging verloren bzw. existiert nicht.

Die Eigenschaften (1) und (2) kann man nicht hoch genug einschätzen. Sie stellen die Basis einer insgesamt gelingenden schulischen Bildung dar, da sie die Entwicklung wesentlicher Persönlichkeitseigenschaften auf Seiten der Lernenden ermöglichen. LehrerInnen haben sie sich im Berufsleben schwer zu erarbeiten. Genau dieser Umstand ist es, der die Bewältigung der problematischen Aspekte der professionellen Kompetenz machbar erscheinen lässt. LehrerInnen wie SchülerInnen benötigen Zeit und Muße für das eigene Lernen; nur dann sind die krisenhaften Erscheinungen bewältigbar.

Die Fixierung auf bestimmte Aufgabenformate bestärkt durch die Bindung der Bildungsstandards an Aufgabensammlungen ist ursächlich mit den für die mathematische Ausbildung prekären Merkmalen (3) bis (5) verbunden und hat negative Folgen. (Jäger, Schupp 2012) Nachdenklichkeit und kritisches Denken kommen im Mathematikunterricht nur noch selten vor. Das blinde Streben nach Effektivität und die erreichte Trivialisierung der im Mathematikunterricht behandelten Inhalte durch die Reduktion auf das Rechnen haben bei den Lehrkräften tiefe Spuren hinterlassen.

4. Elementarmathematische Inhalte regionaler Fortbildungen

Auf der Basis der gemachten Erfahrungen ergaben sich die folgenden inhaltlichen Schwerpunkte.

(1) Ermittlung von Lagebeziehungen, Schnittpunkten, extremalen Eigenschaften und Winkelbeziehungen im Raum mittels elementargeometrischer synthetischer Verfahren im Zusammenhang mit dem heuristischen Verfahren der Erweiterung des zu untersuchenden Bereichs, um bis dahin nicht beachtete Eigenschaften geometrischer Objekte hervortreten zu lassen. (2) Elementare Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung mit dem Schwerpunkt, unterschiedliche Modelle zur Beschreibung stochastischer Prozesse zu entwerfen sowie mehrere Strukturierungsmöglichkeiten für ein Problem zu diskutieren. (3) Eigenschaften stetiger Funktionen und ihre Anwendung in der Mathematik und der Physik. (4) Begründung und Anwendung der Schmiegeeigenschaft von Tangente und Tangentialebene. (5) Nutzung linearer Differentialgleichungen zur Beschreibung von physikalischen und mathematischen Phänomenen und zur Ermittlung von Eigenschaften reeller Funktionen. (6) Extremalprobleme wie das Brachistochrone-Problem und das Fermatsche Prinzip.

Diesen wohlbekannten mathematischen Themen ist gemeinsam, dass sie grundlegenden Kriterien für die Durchführung von Fortbildungsveranstaltungen genügen, die auch als Gelingensbedingungen zu verstehen sind.

5. Beispiele

Bei der Bestimmung der Ableitung der Potenzfunktion $y = x^n$ sollte neben der herkömmlichen Variante auch der folgende Weg eingeschlagen werden. Man betrachtet die Funktion $y = f(x) = x^n - {x_0}^n$ und die Gleichung der

Tangente an der Stelle x_0 mit $y = t(x) = m \cdot (x - x_0)$. Die Differenzfunktion muss wegen der Anschmiegeigenschaft der Tangente eine doppelte Nullstelle an der Stelle x_0 haben. $y = (x^n - {x_0}^n) - m \cdot (x - x_0) = (x - x_0) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + x^{n-3} \cdot {x_0}^2 + \cdots + x \cdot {x_0}^{n-2} + {x_0}^{n-1} - m)$
Der zweite Faktor ist daher an der Stelle x_0 null, woraus das Bekannte folgt.

Mit Hilfe der Exponentialfunktion können unterschiedliche Phänomene wie die Sprunghöhen eines springenden Balles, das Abkühlen von heißem Kaffee und der radioaktive Zerfall in mathematisch gleicher Weise beschrieben und erklärt werden. Zur abnehmenden Sprunghöhe eines ungestört prallenden Balles: Zu messen sind die aufeinander folgenden Sprunghöhen $h_1, h_2, h_3, \ldots$ eines Balles, wenn er aus der Ausgangshöhe H fallen gelassen wird. Einheitliche Bezeichnungen werden vorgegeben, um die Kommunikation zu erleichtern. Die SchülerInnen untersuchen das Phänomen zunächst anhand von drei Werten $H = h_0, h_1, h_2$ (Konzentration der Untersuchung auf die wesentliche Eigenschaft des exponentiellen Wachstums). Die SchülerInnen werden aufgefordert, drei Ausgangsfragen zu beantworten. Welche Ausgangshöhe sollte man im Experiment wählen? Gibt es eine Ausgangshöhe, bei der Eigenschaften zu erwarten sind, die alle anderen nicht haben? Eine Messung ergab: $H = 1m, h_1 = 0{,}8m$. Welchen Wert hat dann h_2? In der anschließenden Diskussion erarbeiten sich die SchülerInnen die Erkenntnisse, dass es keine Ausgangshöhe mit besonderen Eigenschaften gibt bzw. geben sollte, wenn der physikalische Sachverhalt ‚demokratisch' verfasst ist und dass daher bei allen Höhen ‚das Gleiche' passieren sollte. Die Frage ist nun, was dieses ‚Gleiche' nun sein könnte. Dass die Abnahme stets um den gleichen Wert erfolgen könnte, stellt sich schnell wegen entsprechend kleiner Höhen als unmöglich heraus. Die nächste einfache Möglichkeit ist nun, dass die Höhe stets um den gleichen Anteil sinkt, was einige SchülerInnen mit $h_2 = 0{,}64m$ mitunter nach einiger Zeit auch vermuten. Im Experiment untersuchen die SchülerInnen, ob diese Vermutung im Rahmen von Messungenauigkeiten bestätigt werden kann. Die Auswertung erfolgt rechnerisch und graphisch.

Literatur

Törner, G. (2015). Verborgene Bedingungs- und Gelingensfaktoren bei Fortbildungsmaßnahmen in der Lehrerbildung Mathematik – subjektive Erfahrungen aus seiner deutschen Perspektive. *Journal für Mathematik-Didaktik Band 36*, Heft 2, Dezember 2015 (S. 195-226). Springer Verlag Heidelberg