Renate MOTZER, Universität Augsburg, DE

Konzeption eines Seminars zur Universitäts- und Schulalgebra

Viele Lehramtsstudierende empfinden eine große Kluft zwischen dem, was sie an der Universität fachlich lernen müssen, und dem, was sie in der Schule lehren werden. Dass die Universitätsveranstaltungen einen fachlichen Hintergrund für den Schulunterricht bieten sollen, wird von vielen nicht so empfunden. Zwar heißen manche Veranstaltungen wie Teilgebiete aus der Schulmathematik, z.B. Geometrie oder Algebra. Was inhaltlich jeweils betrachtet wird, scheint aber wenig miteinander zu tun zu haben. Im bayr. Staatsexamen für Gymnasiallehrkräfte ist die Algebra-Klausur ein wichtiger (und gefürchteter) Bestandteil. Von Schulalgebra scheint die dort verlangte Galois-Theorie u.ä. sehr weit entfernt zu sein. Damit die Schulalgebra und die Universitätsalgebra nicht zwei zusammenhangslose mathematische Bereiche bleiben sollen, gibt es an der Universität Augsburg seit einigen Jahren ein fachliches Seminar, das eine Brücke bauen will. Es setzt voraus, dass die Studierenden die fachliche Vorlesung zur Algebra gehört haben und nun einen verbindenden Blick auf die Schule werfen können. Die erste Frage im Seminar lautet daher: Was ist eigentlich Algebra bzw. womit beschäftigt sie sich? In der Schule fängt die Algebra mit der Verwendung von Variablen an. Dadurch grenzt sie sich von der Arithmetik, also dem Rechnen mit Zahlen ab. Es geht um (Zahlen-)Mengen und Operationen auf diesen Mengen, die bestimmte Gesetze erfüllen. Auch die Hintereinanderausführung von geometrischen Abbildungen besitzt eine algebraische Struktur (die der Gruppe). Das Lösen von Gleichungen spielt eine große Rolle, in der Schulalgebra wie in der Universitätsalgebra. Algebra beschäftigt sich außerdem häufig mit diskreten Strukturen (im Gegensatz zu den kontinuierlichen in der Analysis).

1 Inhalte des Seminars

Das Algebra-Seminar beginnt mit drei Sitzungen zu magischen Quadraten als einem Vektorraummodell. Hier steht also die lineare Algebra im Hintergrund. Für den Vektorraum der 4x4-Quadrate eine geeignete Basis zu finden ist eine spannende Aufgabe. Zum einen werden die Konzepte von Vektorräumen vertieft, zum anderen können mit Hilfe von Vektorraum-eigenschaften neue magische Quadrate gefunden werden. Durch kombinatorische Überlegung findet man sogar Quadrate mit den Einträgen 1-16 als Linearkombination von sog. Grundquadraten.

Die Sitzungen sind so aufgebaut, dass sie Schulstunden ähneln. Die Referenten sollen den Kommilitonen viele Aufträge zum Selbstentdecken geben. Als Beispiel sei hier die Vorgabe zum ersten Vortrag genannt:

U. Kortenkamp & A. Kuzle (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2017. Münster: WTM-Verlag.

Stellen Sie das Lo-Shu-Quadrat vor. Lassen Sie weitere magische Quadrate mit den Zahlen 1-9 suchen.
Beweisen Sie, dass 5 die mittlere Zahl sein muss (bzw. allgemein, dass es 1/3 der magischen Summe sein muss).
Wie kann man aus dem einen Quadrat die anderen 7 bekommen?
Gehen Sie zu den Symmetrieabbildungen des Quadrats über.
Warum gewinnt man durch Drehen und dann Spiegeln oder umgekehrt keine weiteren Quadrate mehr?
Lassen Sie ein paar Elemente der Gruppentafel bestimmen. (Siehe Lit.)

Stellen Sie das Dürer-Quadrat vor.
Lassen Sie darin weitere magische Summen finden.
Was ist, wenn es nicht mehr die Zahlen 1-16 sein müssen?
Führen Sie an die Idee heran, durch Linearkombinationen neue mag. Quadrate zu finden.
Lassen Sie die Grundquadrate finden.
Untersuchen Sie diese auf lineare Abhängigkeit.
Zeigen Sie an einem anderen mag. Quadrat, dass nicht alle magischen 4x4-Quadrate Linearkombinationen der Grundquadrate sind.

Der nächste Themenblock beschäftigt sich mit endlichen und endlich erzeugten Gruppen. Bei den magischen Quadraten spielte schon die Gruppe der Symmetrieabbildungen eines Quadrats eine Rolle. Symmetrieabbildungen (vor allem in der Ebene, ansatzweise auch im Raum) werden nun allgemeiner betrachtet. Wieder stößt man auf das Phänomen des „Erzeugens“, hier des Erzeugens aus den Spiegelungen. Symmetrieabbildungen stellen ein wichtiges Beispiel für nichtabelsche Gruppen dar. Abelsche Gruppen können als direktes Produkt von zyklischen Gruppen identifiziert werden und die Sylowsätze bringen interessante Einsichten allein aus der Elementezahl einer Gruppe.

Dass es auch endliche Mengen mit mehreren Operationen gibt, wird beim Thema „Endliche Körper“ untersucht. Außerdem lernen die Studierenden den Hamiltonschen Quaterionenschiefkörper kennen und somit auch eine nichtkommutative Struktur bei Zahlen. Welche Bedeutung algebraisch das in der Schule beliebte Rationalmachen des Nenners bei reellen Zahlen hat, kann bei der Beschäftigung mit Körpererweiterungen ebenfalls bewusst werden.

Mit (linearen und quadratischen) Gleichungen über endlichen Zahlenmengen beschäftigte sich ein weiterer Vortrag. Im schulischen Kontext findet man manchmal Rätsel, die mit dem chinesischen Restsatz lösbar sind. Teilbarkeitsregeln können ebenfalls mit dem Modulo-Rechnen begründet werden.

Als eine weitere Möglichkeit Brüche darzustellen, werden Kettenbrüche vorgestellt. Wieder können sie geometrisch gedeutet werden (Wechselwegnahme). Aus algebraischer Sicht ist besonders interessant, dass periodische Kettenbrüche gerade irrationalen Lösungen von quadratischen Gleichungen entsprechen.

Lösungen von quadratischen Gleichungen entsprechen auch den Punkten (als Teilmenge der komplexen Ebene), die mit Lineal und Zirkel konstruiert werden können. Dieser klassische Zusammenhang darf in einem Algebra-Seminar nicht fehlen. Dass die Menge der konstruierbaren Punkte einen Körper bildet, ist eine ungewöhnlich schöne Verbindung von Geometire und Algebra. Die Überlegungen, wie man Wurzeln konstruiert (über Thaleskreis und Höhensatz) führen direkt in die Schulmathematik. Dass man Gleichungen 3. Grades zwar nicht durch Konstruieren mit Lineal und Zirkel, aber mit Falten lösen können kann, zeigt der nächste Vortrag. Als weitere geometrische Methode zum Lösen von algebraischen Gleichungen lernen die Studierenden schließlich noch den Lill-Kreis und die Lill-Methode mit einem Polygonzug kennen.

Manche der Themen (wie die Sylowsätze) haben wenig Schulbezug, aber einen großen Bezug zur anstehenden Staatsexamensklausur. Die anderen Themen spielen doch als Hintergrundwissen an vielen Stellen in der Schule eine Rolle und könnten bewusst für die Konzeption eines W-Seminars o.ä. verwendet werden.

2 Evaluation durch die Studierenden

Das Seminar unterscheidet sich methodisch/organisatorisch in zwei Punkten von sonst üblichen fachlichen Seminaren. Zum einen sollen die Referate weniger Vorträge, sondern eher Unterrichtsstunden gleichen. Zum anderen werden statt Seminararbeiten Hausaufgaben vergeben, d.h. die Studierenden müssen sich auch daheim nochmal mit allen Themen der Veranstaltung beschäftigen, nicht nur mit ihrem eigenen. Früher ließ ich ausführliche Reflexionen schreiben, im vergangenen Semester gab es erstmal Übungsblätter (die die Referenten erstellten). Dass dies positiv angekommen ist, zeigt z.B. folgender Kommentar eines Teilnehmers:

1. Im Seminar ist man bis auf die gestellten Aufgaben eher passiv und Zuhörer. Durch das Aufgabenblatt muss man sich im Anschluss noch einmal selber intensiv mit dem Thema auseinandersetzen um die Aufgaben lösen zu können. Hier musste man oft im Internet oder der Bibliothek weiter recherchieren um an benötigte Informationen zu kommen. Die Bearbeitung der Aufgabenblätter hilft so sicherlich das Thema besser zu verstehen.
2. Ich habe ja bereits letztes Jahr dieses Seminar besucht. Damals musste ein Portfolio geschrieben werden. Mir persönlich hat das Rechnen der Aufgaben mehr gebracht, da hier wie oben beschrieben mehr Eigeninitiative gezeigt werden muss und so das Thema besser verstanden wird. Auch eine Ausarbeitung zum eigenen Thema finde ich weniger sinnvoll, da zwar das eigene Thema noch besser und intensiver bearbeitet und verstanden wird, aber das "Gesamtwissen" über das Seminar deutlich schlechter ist. Ich denke, das Aufgabenblatt ist sehr gut geeignet für solch ein Seminar.

Ebenso befürworteten alle anderen Teilnehmer Übungsblätter statt Seminararbeit oder ein Portfolio mit ausführlichen Reflexionen.

Manche Studierende schätzten die Veranstaltung trotzdem inhaltlich nicht als allzu sinnvoll ein (allerdings waren dies nur vereinzelte Stimmen):

In Bezug auf das spätere Lehrwesen nur aufgrund des Vortrags sinnvoll. Das Fachliche geht meistens zu weit über die Schule hinaus.

Was die Gewichtung der einzelnen Themen bzgl. des persönlichen Interesses („Fanden Sie das Thema interessant?“) im Vergleich zum Schulbezug („Hat das Thema einen brauchbaren Bezug zur Schulmathematik?“) angeht, so fällt auf, dass die meisten beide Kategorien gleich oder nur mit kleinen Unterschiedenen bewerteten (wobei die Sylowsätze tendenziell schlecht weg kamen). Eine Studentin fällt in ihrem Wertungsverhalten hier eher aus dem Rahmen. Sie fand Symmetriegruppen persönlich eher uninteressant, für die Schule aber relativ wichtig. Bei den Sylowsätzen hat sie genau umgekehrt geantwortet.

Die LPO schreibt (zumindest in Bayern) fast das ganze Studium vor, so dass wenig Spielraum besteht. Dass es ein fachliches Seminar speziell für Lehramtsstudierende gibt, ist einer der wenigen Punkte, bei denen ein bisschen Freiraum genutzt werden kann. Ob diese Veranstaltung sinnvoll war, beantwortet ein Student so:

„Sehr sinnvoll und notwendig! Mehr solche Veranstaltungen wären sinnvoll!“