Dmitri NEDRENCO, Julius-Maximilians-Universität Würzburg, DE

Papierfalten an der Universität Würzburg

An der Universität Würzburg entstand über die letzten zwei Jahre ein semesterlanger Kurs »Axiomatisieren lernen mit Papierfalten«, in dem Studierende des gymnasialen Lehramts mathematisches Papierfalten von einem höheren Standpunkt betrachten und darüber zu schwierigen Fragen der modernen Axiomatisierung der euklidischen Ebene gelangen. In dieser Übersicht fassen wir Ideen zur Motivation, Gestaltung und Durchführung dieses Kurses zusammen und diskutieren Beobachtungen und erste Antworten auf Forschungsfragen.

Motivation

Mathematisches Papierfalten gewinnt im Schulunterricht immer mehr an Bedeutung (vgl. E&P 2014, SH&H 2013, Golan 2011, Arslan 2012, A&AT 2013). Doch oft kennen sich Lehrkräfte erfahrungsgemäß nur wenig mit modernen Theorien und Ergebnissen des Fachgebiets aus. Unsere Idee ist es, frühzeitig, bereits im Studium, angehende Lehrerinnen und Lehrer in mathematischem Papierfalten auszubilden, damit sie später im Unterricht erlerntes Wissen professionell und gezielt einsetzen können.

Dabei ist uns aufgefallen, dass Papierfalten nicht nur eine spannende mathematische Beschäftigung ist, sondern zudem als ein wirkungsvolles Instrument eingesetzt werden kann, um eine Diskussion der schwierigen Probleme der modernen Axiomatik und Axiomatisierung (vgl. Yannotta 2013) genutzt werden kann. Insbesondere die Axiomatisierung der euklidischen Ebene – ein Meilenstein der Mathematik, ein schwerer und schwierig zu erklärender Prozess – konnte somit auf natürliche Weise angegangen werden.

Insgesamt sind wir zu der Überzeugung gelangt, dass mathematisches Papierfalten einen hohen Bildungswert hat, sowohl als eine spannende Theorie als auch als ein Übungsplatz für komplizierte Materien der Mathematik.

Axiomatisieren und Papierfalten

Hier wollen wir kurz die Verbindung zwischen Axiomatik und Papierfalten schildern. Erst vor etwa dreißig Jahren wurde ein Teilgebiet des mathematischen Papierfaltens, das sog. 1-fach-Origami (»man falte Papier so, dass dabei genau ein Falz entsteht«), systematisch aufgebaut und axiomatisiert (vgl. A&L 2006 und Martin 1998b). Diese Axiomatisierung war noch nicht sehr rigoros und entsprach modernen Anforderungen an Axiomensysteme nicht. Aber genau dieser Umstand hat sich als sehr fruchtbar für unseren Kurs herausgestellt, denn nun hatten wir eine spannende Theorie, die man spielerisch axiomatisieren konnte und am Ende des Kurses nicht nur eine zusammenhängende Sammlung von interessanten Konstruktionen und Sätzen hatte, sondern vielmehr über die Qualität und Notwendigkeit der gefundenen Axiome diskutieren konnte. So gelangen wir fast unbemerkt zu schwierigen Fragen und Problemen der modernen Axiomatik der euklidischen Ebene (Stichworte: Modell, ontologische Bindung, Widerspruchsfreiheit), die gewissermaßen eine Bühne ist, auf der das 1-fach-Origami stattfindet, und somit direkt ins Falten involviert und daher genauer zu betrachten ist.

Gestaltung und Durchführung

Die Kurse wurden in Anlehnung an das Prinzip des lokalen Ordnens aufgebaut, das heißt wir haben mit unsortierten Fragen und Faltugen angefangen und haben sie immer weiter systematisiert und schließlich das 1-fach-Origami axiomatisiert.

Die Kurse bestanden aus drei Abschnitten: Ein Viertel des Kurses aus der Theorie der Flachfaltbarkeit (vgl. Hull 2013), hier haben Studierende eine offene Fragestellung (»Was kann über Faltmuster flachgefalteter Objekte gesagt werden?«) disktuierend bearbeitet, entwickelt und einen Spezialfall vollständig charakterisiert. Sie haben Vermutungen aufgestellt, sortiert und anschließend bewiesen. Die Hälfte des Kurses bestand aus der Theorie des 1-fach-Origami. Hier haben wir viele Konstruktionen (Stammbrüche, Polygone, Polyeder, Parabeln und quadratische Gleichungen etc.) kennengelernt und sie nach und nach auf eine kleine Menge von Grundkonstruktionen reduziert. Anschließend haben wir die Unabhängigkeit dieser »Axiome« diskutiert. Im letzten Viertel des Kurses ging es dann um die euklidische Ebene, ihre schulische und universitäre Darstellung, Probleme ihrer Mathematisierung und u.a. die spannende Frage: »Was ist denn ein Punkt« und warum man darauf eine Antwort geben können sollte.

Fragen und Ziele

Die Gestaltung und Durchführung eines linear und selbstentdeckend aufgebauten Kurses zum mathematischen Papierfalten war und bleibt ein wesentliches Ziel unserer Forschung. Konkret wollen wir erreichen, dass Studierende wesentliche Konstruktionen und Aussagen des 1-fach-Origami wie etwa Lösen von linearen, quadratischen und kubischen Gleichungen kennen; wissen wie und wann sie diese Sätze und Konstruktionen im Unterricht einsetzen können und welche Schwierigkeiten Schülerinnen und Schüler dabei erfahren; sie können die Theorie des 1-fach-Origami der Theorie der Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen vergleichend gegenüberstellen. Ferner wissen Studierende was Axiome, Axiomensysteme, vor allem aus der Sicht des 1-fach-Origami und der euklidischen Ebene, und die damit verbundene logischen Finessen sind bzw. sein können. Insgesamt erreichen Studierende eine gewisse (noch zu definierende) geistige Reife, um sich ausreichend über die axiomatische Methode und die moderne Sicht auf die euklidische Ebene äußern zu können.

Ferner wollen wir mit dem Kurs und der damit verbundenen Forschung begreifen, welche Schwierigkeiten Studierende mit Axiomen und der axiomatischen Methode haben und wie sie mit Axiomen des 1-fach-Origami bzw. der euklidischen Geometrie umgehen. Wir interessieren uns auch dafür, wann und ob Studierende einen Bedarf in der axiomatischen Methode verspüren und ob man dies genau charakterisieren kann. Wir wollen klären, ob es möglich ist, festzustellen, wann eine studentische Antwort vom Verständnis der axiomatischen Methode zeugt. Insgesamt wollen wir verstehen, welchen Beitrag zum Verständnis der Axiomatik (der euklidischen Ebene) mathematisches Papierfalten leisten kann.

Methodik

Um ggf. eine Entwicklung in den Antworten Studierender festzustellen, haben wir uns für einen Pre-Post-Design entschieden. Studierende wurden vor dem Kurs schriftlich befragt (ca. 10 Fragen, offene Antworten) und nach dem Kurs paarweise interviewt. Die Fragen wurden teils aus der van-Hiele-Forschung entnommen (vgl. G&J 1998), teils von uns entwickelt. Die Antworten analysieren wir hinsichtlich der van-Hiele-Niveaus sowie der Qualität der Antworten vor und nach dem Kurs (vgl. Hoffer 1983, G&J 1998, B&S 1986, Mayberry 1983) und wollen mittels Grounded Theory ein Kategorienschema entwickeln, um zu erkennen, was eine »gute« Antwort auf solche Fragen sein soll.

Erste Ergebnisse

Der Kurs wurde insgesamt drei Mal, jeweils einsemestrig durchgeführt. In den Kursen waren jeweils 9–14 Studierende.

In Pretests wurden Studierende u.a. gefragt, wie sie jemandem das Wort »Axiom« erklären würden, was für sie die euklidische Ebene sei, wie sie die Behauptung »jemand könne ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln zeichnen« erwidern würden, welche wesentlichen Eigenschaften alle Rauten, aber nicht alle Quadrate haben etc. Beispielsweise im letzten Kurs (WS16/17, Semesterzahl: Ø5,3, Median: 3; Studierende: 9) hat nur eine Person angegeben, dass ein Axiom eine Aussage ist, im Vergleich zu 6 Nennungen im WS15/16 (Semesterzahl: Ø6,4, Median: 6; Studierende: 14). Im WS16/17 haben nur 5 Personen eine halbwegs sinnvolle Antwort auf die Frage nach der euklidischen Ebene gegeben.

In den Interviews wurden gezielt die Fragen aus dem Pretest sowie einige weitere Verständnisfragen gestellt. Aus den Beobachtungen und ersten Analysen ist festzustellen, dass Studierende: nur selten konkrete Standardkonstruktionen nachfalten konnten; beinahe allesamt die Frage bejaht haben, ob der Kurs »ihre Art über Mathematik nachzudenken« verändert habe; sich in ihrem Antwortverhalten vor und nach dem Kurs nicht fundamental verändert haben.

Fazit

In seiner jetztigen Form kommt der Kurs sehr gut bei Studierenden an. Es bleibt, die Interviews abschließend auszuwerten, ggf. Kategorien zu bilden und die genannten Forschungsfragen zu beantworten.

Literatur

Alperin, R. C., & Lang, R. J. (2006). One-, two, and multi-fold origami axioms. *Origami 4*. A K Peters.

Arıcı, S., & Aslan-Tutak, F. (2013). The effect of Origami-based instruction on spatial visualization, geometry achievement, and geometric reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(1), 179-200.

Arslan, O. (2012). *Investigating beliefs and perceived self-efficacy beliefs of prospective elementary mathematics teachers towards using origami in mathematics education* (Doctoral dissertation, Middle East Technical University).

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for research in mathematics education*, 31-48.

Etzold, H. & Petzschler, I. (2014) *Mathe verstehen durch Papierfalten: Anleitungen und Arbeitsblätter für die Sekundarstufe.* Mülheim an der Ruhr.

Golan, M. (2011, June). Origametria and the van Hiele Theory of Teaching Geometry. In *Origami 5*. CRC Press.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1998). On the assessment of the van Hiele levels of reasoning. Focus on learning problems in mathematics, 20, 27-46.

Hoffer, A. (1983). Van Hiele-based research. In: *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 205-227.

Hull, T. (2013). *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics*. CRC Press.

Martin, G. E. (1998a). *The foundations of geometry and the non-Euclidean plane*. Springer.

Martin, G. E. (1998b). *Geometric Constructions*. Springer.

Mayberry, J. (1983). The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for research in Mathematics Education*, 58-69.

Schmitt-Hartmann, R., & Herget, W. (2013). Moderner Unterricht: Papierfalten im Mathematikunterricht, 5–12. Klett

Yannotta, M. (2013). Students' Axiomatizing in a Classroom Setting. In *Proceedings of the 16th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*.