Marcus NÜHRENBÖRGER, TU Dortmund, Ralph SCHWARZKOPF, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, DE

Algebraisches Denken im Arithmetikunterricht der Grundschule

Im Arithmetikunterricht der Grundschule soll es nicht allein darum gehen, Aufgaben mittels spezifischer Rechentechniken auszurechnen und Ergebnisse zu ermitteln. Vielmehr sollen die Kinder arithmetische Zusammenhänge ergründen und Zahlen oder Terme miteinander vergleichen, um Aufgaben geschickt voneinander abzuleiten und Zahlen flexibel miteinander zu verknüpfen (Walter et al. 2008). In diesem Sinne werden bereits in der Grundschule algebraische Inhalte mit den Zeichen der Arithmetik thematisiert (Kieran 2011, Seo & Ginsburg 2003, Steinweg 2013).

Studien zeigen allerdings auf, dass Schülerinnen und Schüler auch noch in der Sekundarstufe vor allem ein operationales Verständnis von Termen besitzen, das sich letztlich negativ auf das Verständnis von algebraischen Termbeziehungen auswirkt (vgl. z.B. Borromeo Ferri & Blum 2011). Womöglich dienen im Alltag des Arithmetikunterrichts in Grundschulen weiterhin Terme doch vornehmlich zur Schulung arithmetischer Fertigkeiten zum Ausrechnen von Aufgaben. Für diese Interpretation sprechen u.a. Forschungsergebnisse, nach denen Schülerinnen und Schüler das Gleichheitszeichen aus ihren Erfahrungen mit dem Arithmetikunterricht heraus vor allem als Handlungszeichen zum Ausrechnen interpretieren (vgl. zusammenfassend Steinweg 2013, Kieran 2011).

Diese einseitige Interpretation des Gleichheitszeichens wird bereits von Winter (1982) kritisiert: Schon im Anfangsunterricht der Grundschule sollte das Zeichen im Sinne eines symmetrischen Relationszeichens, das die prinzipielle Austauschbarkeit zweier Terme unterstellt, thematisiert werden (vgl. auch Malle 1993). Um dieses Ziel zu erreichen, so geben Seo und Ginsburg (2003, 169) zu bedenken, sind vielfältige inhaltlich bedeutsame, produktive Lernanlässe zur Nutzung des Gleichheitszeichens notwendig, zu deren Gunsten die Einführungen in formale Lesarten des Zeichens zurückstehen können. Nührenbörger und Schwarzkopf (2013) schlagen dazu vor, dass die Kinder zunächst ein flexibles Verständnis von arithmetisch bedeutsamen und algebraisch tragfähigen Gleichheiten entwickeln sollten, bevor ein formaler Umgang mit Gleichungen thematisiert wird, kurz formuliert: Die Lernenden werden angeregt, durch *strukturelles Umrechnen*, also durch passende operative Variationen, einen Term in einen anderen zu überführen, wobei die Gleichheit nicht notwendigerweise durch das Gleichheitszeichen symbolisiert werden muss.

Im Forschungsprojekt Pendel M (Praxisnahe Entwicklungsprojekte im Dialog mit Erzieherinnen und Lehrkräften, Mathematik, finanziert durch den

Ernst Klett Verlag) differenzieren wir diesen Ansatz weiter aus und entwickeln Lernsituationen für die Grundschule, die dementsprechend algebraische Grundlagen im Dienste der Arithmetik setzen. Bereits im 1. Schuljahr werden die Kinder während der Einführung der ersten Operationszeichen bereits dazu angeregt, Rechenterme nicht allein als Verknüpfung von Zahlen, sondern als eigenständige mathematische Objekte zu verstehen und zwischen ihnen Beziehungen herzustellen.

Letztlich ist das Ziel natürlich nicht neu, sondern eine der zentralen Intention beim Einsatz substantieller Aufgabenformate (Wittmann 1995), an denen wir uns orientieren. Allerdings zeigt sich in der Unterrichtspraxis, dass Kinder operative Aufgabenstellungen nicht immer dazu nutzen, um über das Ausrechnen der Ergebnisse hinaus Überlegungen über strukturelle Zusammenhänge zu entwickeln, die sich auf der Grundlage der elementaren Rechengesetze ergeben. Vielmehr konzentrieren sie sich auf die Berechnung der Ergebnisse und die Beschreibung „konkret-sichtbarer" Phänomene (vgl. Häsel-Weide 2016, Rechtsteiner-Merz 2013).

Um das Verständnis der Kinder also nicht allein auf der Grundlage bisheriger Routinen zu etablieren, sondern mit Blick auf eine algebraische Perspektive auf mathematische Zusammenhänge zu erweitern, bedarf es zusätzlicher Anregungen. Letztlich bedeutet ein algebraischer Lernprozess eine Neustrukturierung arithmetischen Faktenwissens, die Grundschulkinder insbesondere (bzw. wenn nicht sogar ausschließlich) im Zuge kollektiver Argumentationen (Miller, 1986; Steinbring, 2005) vornehmen können. Hierzu ist es wesentlich, dass sie eine vom Fach aus intendierte Notwendigkeit sehen, mathematische Argumente zu suchen und auszuhandeln, oder anders formuliert, dass sie *produktiv irritiert* sind. „Irritationen entstehen dann, wenn bisherige Ansichten, Zugangsweisen, Vorstellungen oder Erwartungen im Zuge der fachlichen Notwendigkeit versagen – sie sind aber in dem Fall produktiv, wenn die Kinder Möglichkeiten zur Aufklärung der Spanne zwischen Erwartung und Enttäuschung entwickeln" (Nührenbörger & Schwarzkopf 2013). Von besonderer Bedeutung sind daher soziale Prozesse der Aushandlung von Argumenten zwischen den Kindern und mit der Lehrkraft (Schwarzkopf 2003). Selbstredend geht es hierbei nicht um die Strenge einer formalen Argumentation, wie sie beispielsweise ein mathematisch fundierter Beweis liefert. Vielmehr sollen Kinder zum Argumentieren über Sichtweisen auf Termbeziehungen angehalten werden und ihre Ideen in Diskussionen aktiv einbringen und erläutern (Krauthausen 2001; Winter 1983).

Beispiel: Additive Strukturen beim Rechnen nutzen

Im Zentrum der operativen Durcharbeitung des 1+1 steht die Entwicklung der Fähigkeit, sog. „schwierige Aufgaben“ aus sog. „einfachen Aufgaben“ abzuleiten (vgl. Wittmann & Müller 2012) und in diesem Sinne ähnliche Beziehungen zwischen verschiedenen Termen zu erkunden und zu generalisieren. Aus stoffdidaktischer Perspektive werden Aufgaben bei der Einführung der Addition dann als einfach angesehen, wenn sie dekadische Strukturen ausnutzen (x+5 bzw. 5+x und x+10 bzw. 10+x sowie x+y=5 und x+y=10) oder auf Verdopplungs- und Nachfolgerbeziehungen (x+x und x+1 bzw. 1+x) beruhen. Diese mathematischen Strukturen dienen als Gerüst zur allgemeinen Klassifikation verschiedener Terme. Allerdings ist eine solche Zuordnung bereits anhand der Zahlen möglich: Immer ein Summand ist „1“, „5“ oder „10“, die Summanden treten doppelt auf oder die Summe ergibt „5“ bzw. „10“. Werden hingegen die einfachen Aufgaben als Werkzeug genutzt, mit dem weitere Aufgaben berechnet werden, sind Terme in Relation zueinander zu deuten, die keine sichtbar ähnlichen Strukturen aufweisen. Anders formuliert, die Schülerinnen und Schüler müssen einerseits eine schwierige Aufgabe mit Bezug auf eine einfache umdeuten, andererseits unter Anwendung der elementaren Rechengesetze mit Hilfe der „einfachen Summe“ umwandeln. Allein am Beispiel der Beziehung zwischen dem Term 8+6 und der einfachen Aufgabe 7+7 wird schnell deutlich, wie vielfältig diese Umformungsprozesse sein können: 8+6 = (6+2)+6 = (2+6)+6 = 2+(6+6) = 2+12 oder 8+6 = (6+2)+6 = (6+1+1)+6 = (6+1)+(1+6) = 7+7 oder 8+6 = (8-1)+(6+1) = 7+7.

In einem Unterrichtsvorhaben des Projekts wurde genauer erfasst, wie Kinder für solche Umwandlungsprozesse sensibilisiert werden können. Als methodischer Zugang für die Kinder wurde das Ordnen und Sortieren von Aufgaben gewählt (vgl. Häsel-Weide 2016b; Schütte 2004). Denn Aktivitäten ermöglichen es, eine Aufgabe zunächst zu analysieren und eine Entscheidung zu treffen, bevor sie ausgerechnet wird. Dazu wurden spezifische Aufgabenkarten und Sortiertafeln sowie Strategiekarten entwickelt, die explizit auf die Erarbeitung der Rechenstrategien in Relation zu den fachlichen Merkmalen der Unterscheidung von additiven Aufgaben zielen, wie sie u.a. auch in der Einspluseins-Tafel (Wittmann & Müller 2012) zum Ausdruck kommen.

Im Projekt wird herausgestellt, inwiefern Kinder mit Hilfe der Materialien und diskursiven Settings grundlegend ähnliche algebraische Beziehungen zwischen verschiedenen Aufgaben den Blick nehmen können

Literatur

Borromeo Ferri, R. & Blum, W. (2011). Vorstellungen von Lernenden bei der Verwendung des Gleichheitszeichens an der Schnittstelle von Primar- und Sekundarstufe. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht.* Münster: WTM Verlag, 127-131.

Häsel-Weide, U. (2016a). *Vom Zählen zum Rechnen. Struktur-fokussierende Deutungen in kooperativen Lernumgebungen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Häsel-Weide, U. (2016b). *Gemeinsam ordnen – gemeinsam lernen. Mathematische Strukturen sichtbar machen.* Grundschulunterricht Mathematik, 2016 (1), 30-33.

Kieran, C. (2011). Overall Commentary on Early Algebraization. In J. & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (579-593). Berlin: Springer.

Krauthausen, G. (2001). „Wann fängt das Beweisen an? Jedenfalls, ehe es einen Namen hat.“ In W. W*eiser & B. Wollring (Eds.),* Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe (99- 113). Hamburg: Dr. Kovac.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra.* Wiesbaden: Vieweg.

Miller, M. (1986). *Kollektive Lernprozesse. Studien zur Grundlegung einer soziologischen Lerntheorie.* Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Nührenbörger, M. & Schwarzkopf, R. (2013). *Gleichheiten in operativen Übungen. Entdeckungen an Pluspfeilen.* Mathematik differenziert, 4(1), 23-28.

Rechtsteiner-Merz, Ch. (2013). *Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung.* Münster: Waxmann.

Schütte, S. (2004). *Rechenwegsnotation und Zahlenblick als Vehikel des Aufbaus flexibler Rechenkompetenzen.* Journal für Mathematik-Didaktik, 25, 130-148.

Schwarzkopf, R (2003). *Begründungen und neues Wissen.* Journal für Mathematik-Didaktik, 24 (3/4), 211-235.

Seo, K., Ginsburg, H. (2003). Classroom context and children’s interpretations of the equals sign. In A. Baroody & A. Dowker (Hrsg.), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills.* London: LEA, 161-187

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction.* An Epistemological Perspective. New York: Springer.

Steinweg, A.S. (2013). *Algebra in der Grundschu*le. Heidelberg: Spektrum.

Walther, G.; Selter, Ch. & Neubrand, J. (2008). Die Bildungsstandards Mathematik. In. G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg). *Bildungsstandards für die Grundschule* (16-41). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Winter, H. (1982). *Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe*. mathematica didactica, 5, 185 – 211.

Winter, H. (1983). *Zur Problematik des Beweisbedürfnisses.* Journal für Mathematikdidaktik 4 (1), 59–95.

Wittmann, E.Ch. (1995). Unterrichtsdesign und empirische Forschung. In K.P. Müller (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterrich*t. Hildesheim: Franzbecker, 528-531.

Wittmann, E. C., Müller, G. N., (2012). *Das Zahlenbuch 1*. Stuttgart: Klett.