Hans Peter NUTZINGER, Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd, DE

Die Geometrie der Harmonie - Musikalische Muster mathematisch modellieren

Abstract

Motivation und Erfolg beim Lernen von Mathematik basieren gerade auch darauf, dass Kinder die Muster der Mathematik und deren Schönheit erforschen und entdecken können. (vgl. Wittmann, 2003) Mit diesem Verständnis mathematischen Tuns ist einzusehen, warum Mathematik - auch und gerade aus sich selbst heraus betrieben – ungemein erfreulich sein kann. Hier wird ein interdisziplinärer Weg gezeigt, der die Mustersuche dort ermöglicht, wo sie unser Geist auf heimliche Weise ohnehin zu betreiben scheint: In der Musik. . („Musica est exercitium arithmeticae occultum [...], Leibnitz an Goldbach im April 1712) Das gewählte Beispiel – Tymoczko's „A geometry of music" (Tymoczko, 2011) steht dabei nur exemplarisch für eine Vielzahl von Möglichkeiten des interdisziplinären Arbeitens zwischen Mathematik und Musik. (vgl. Nutzinger, 2015)

Vorweg

Die im Schulalltag oft zu hörenden Fragen nach dem „Warum überhaupt Mathematik?", oder „Wozu brauch ich das denn überhaupt?", sind immer aufs neue Alarmzeichen. Kinder, die sich innerhalb von wenigen Schuljahren von einem Fach distanzieren, auf das sie sich *vor* Schuleintritt noch gespannt gefreut haben (vgl. Eichler, 2007), weisen uns darauf hin, dass es wohl nicht immer gelingt, die Schönheit und Sinnhaftigkeit der Mathematik zu vermitteln. Den Schülerinnen und Schülern zu erzählen, dass sie das Gelernte vermeintlich alles einmal brauchen werden, ist oft schlichtweg gelogen. Wird diese Lüge entlarvt, fehlt uns jede weitere Möglichkeit das verlorene Vertrauen in das „Angstfach" wiederherzustellen. (Winkler, 2014, S. 108)

Nur echtes, begeistertes Betreiben von Mathematik wird dazu führen, dass ihre Methoden auch später sinnvoll und gerne angewendet werden (Fanghänel, 2000). Erich Wittmann wies darauf hin, dass Mathematik die Wissenschaft der Muster ist. Diese Muster gilt es Kindern anzubieten und sie daran forschen zu lassen (Wittmann, 2003).

Ich möchte hier nun eine Mustersuche für die Sekundarstufe anregen, die m.E. nur in Grundzügen Einzug in den Unterricht gefunden hat. Das mathematische Erforschen musikalischer Muster.

Tymoczkos Geometrie der Musik

In „A geometry of music“ veranschaulicht der Autor Harmonien geometrisch (Tymoczko, 2011) .

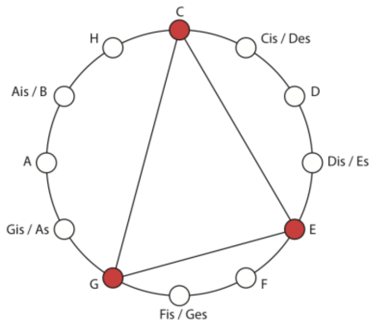

Abbildung 1

Abbildung 1 zeigt den C-Dur Akkord als Dreieck in einem Kreis. Die zwölf Halbtonschritte werden auf der Kreislinie angeordnet und die Töne des Dreiklangs markiert. Wir erhalten das zum Dreiklang gehörende Dreieck G-E-C. (Also das Bild des C-Dur Dreiklamnges.)

Nun können wir geometrische Transformationen auf das entstandene Dreieck anwenden. Abbildung 2 zeigt die Folgen einer Drehung.

Der C-Dur Akkord wird in einen anderen Dur-Akkord überführt. Drehen wir das Dreieck weiter und hören die Töne des neuen Dreiecks, erklingt immer ein Dur-Akkord. Wir erreichen also durch diese Repräsentationsform alle 12 Dur-Dreiklänge.

Führen wir eine Achsenspiegelung des Dreiecks auf die in Abbildung 3 dargestellte Weise durch, wird aus dem C-Dur-Dreiklang ein a-Moll-Dreiklang. Auffällig ist, dass diese beiden Akkorde eben auch in der Harmonielehre miteinander verwandt sind.

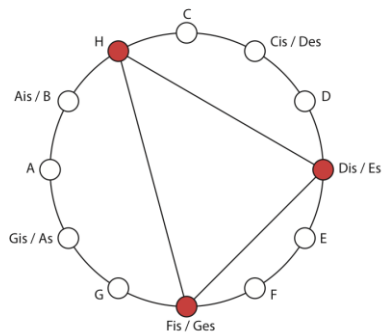

Abbildung 2

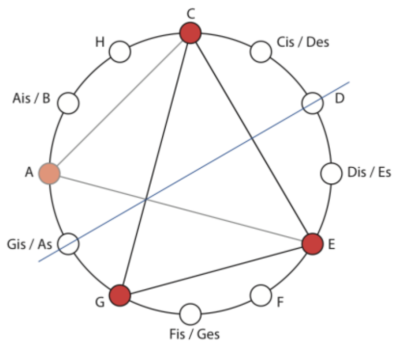

Abbildung 3

Die Mollparallele, ist auch in diesem geometrischen Modell mit der Durparallele verbunden.

Durch weitere Drehung des „Moll-Dreiecks“ erreichen wir nun alle Moll-Akkorde. Wir haben so ein vollständiges geometrisches Modell der Dur-Moll-Harmonik von Dreiklängen zur Verfügung.

Die Einfachheit des Modells verblüfft dabei auf mehrfache Weise. Zum einen liefert sie eine Visualisierung von akustischen Phänomenen, zum anderen regt sie dazu an, weiterzudenken und -zufragen. Dieses Modell ermöglicht daher m.E. differenziertes Arbeiten. Die Grundidee kann jeder verstehen. Weiterdenken kann jede Schülerin, jeder Schüler ganz individuell.

Das Modell ist an diesem Punkt längst nicht erschöpft. Die Untersuchung von anderen Formen hinsichtlich des damit verbundenen Klangs lässt sich beliebig auf andere Vielecke ausweiten. Die daraus entstehenden Klänge mit ihrer Visualisierung in Verbindung zu bringen ist dann ein nächster Schritt.

Anmerkungen zum Einsatz im Unterricht – Frei forschen

Um dieses Modell sinnvoll im Unterricht einsetzen zu können, muss es den Schülerinnen und Schülern ermöglicht werden, die visualisierten Klänge zu hören. Keyboards, Gitarren, Orff-Instrumenten, oder geeignete Software (s.u.) gehören daher definitiv zum nötigen Unterrichtsmaterial.

Das Modell ist sehr flexibel einsetzbar. Erprobt habe ich es beginnend ab Klasse 6. Die Aufgabenstellung sollte meiner Erfahrung nach lediglich darauf beruhen, die Grundzüge des Modells zu klären: Töne werden markiert, verbunden und der Klang gehört und andersherum. Danach experimentieren die Schülerinnen und Schüler frei. Weder die dargestellten Zusammenhänge von Dur und Moll, noch die geometrischen Transformationen *müssen* im Vorfeld geklärt werden, können aber später ab Klasse 8 dazu genutzt werden, um Dreiklangsbeziehungen zu visualisieren.

Unterstützend können je nach gewünschter oder möglicher Tiefe des Arbeitens folgende Fragen gestellt werden:

- Wie verändert sich der Klang, wenn Du deine Figur veränderst/drehst/spiegelst?
- Wie klingen andere Figuren im Vergleich?
- Wie klingt ein Viereck, Fünfeck, Sechseck...?

Beispiele für mathematische Inhalte sind: Drehung, Spiegelung, Symmetrie, Ähnlichkeit, Kongruenz, Begriffsfestigung „Vielecke“, Bildung von Klassen, Relationen uvm. .

Um das Modell noch tiefer erkunden zu können bietet sich an, die Visualisierung direkt hörbar zu machen. Tymoczko selbst hat bereits eine Software entwickelt, die am Keyboard gespielte Harmonien in die dazugehörige Visualisierung umwandelt (dmitri.mycpanel.princeton.edu). Auch gibt es unter der Lizenz von Geogebra die Möglichkeit Dur, Moll, verminderte und übermäßige Akkorde geometrisch zu deuten und miteinander in Relation zu setzen.

www.geogebra.org/m/qHVAC9DT (Geometrie Musik, Georg Wengler)

Der Mustersuche sind dann Tür und Tor geöffnet.

Zum Abschluss

Welches musikalische Phänomen wird hier geometrisch visualisiert?

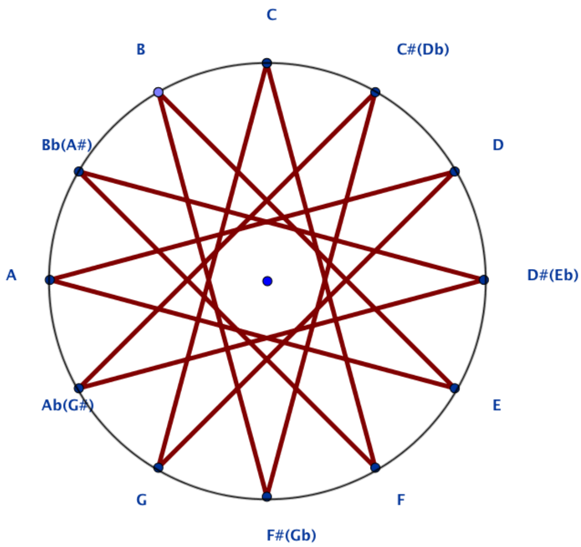

Abbildung 4

Literatur

Eichler, K.-P. (2007). Ziele hinsichtlich vorschulischer geometrischer Erfahrungen. In H. Radatz (Ed.), *Impulse für den Mathematikunterricht*. Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage.

Fanghänel, G. (2000). *Arbeit mit Aufgaben – wesentliches Mittel zur Gestaltung modernen Mathematikunterrichts*. Berlin: PAETEC.

Nutzinger, H. P. (2015). *The connection of mathematics and music as an opportunity to change beliefs.* Paper presented at the MACAS conference, Schwäbisch Gmünd.

Tymoczko, D. (2011). *A geometry of music harmony and counterpoint in the extended common practice*. New York: Oxford University Press.

Winkler, R. (2014). Die Geburt der Mathematik aus den Bedingungen der Musik. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, 47*, 108 - 122.

Wittmann, E. (2003). Was ist Mathematik und welche pädagogische Bedeutung hat das wohlverstandene Fach für den Mathematikunterricht auch in der Grundschule? In M. Baum & H. Wilpütz (Eds.), *Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch.* Seelze: Kallmeyer.

Abbildungen 1 – 4 Hans Peter Nutzinger