Nicola OSWALD, Bergische Universität Wuppertal, DE

Historisches Papierfalten für den Mathematikunterricht - eine Fallstudie

Zusammenfassung. In diesem Beitrag werden die Ergebnisse von zwei Forschungsprojekten miteinander in Einklang gebracht. In einer vorangegangenen Arbeit (Hauck/Oswald, 2016) untersuchten wir eine Mathematikstunde, welche sich auf den Kontext eines Tagebucheintrags des Mathematikers Adolf Hurwitz (1859 - 1919) zum so genannten *Fliege-Spinne- Problem* bezieht. Die Schulstunde wurde in einer 9. Klasse (Realschule) im Rahmen einer qualitativen Fallstudie getestet und positiv evaluiert. Die Übertragbarkeit der Ergebnisse sollen anhand eines weiteren Tagebucheintrags aus dem Jahre 1907 von Adolf Hurwitz veranschaulicht werden, in welchem der Mathematiker den goldenen Schnitt sowie die Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks erklärte (siehe (Oswald, 2014)).

1. Verortung und vorangegangene Studie

Unter historisch-genetischem Unterricht verstehen wir die Vermittlung von Inhalten unter Einbeziehung ihrer geschichtlichen Entwicklung. Daran orientierter Mathematikunterricht wurde in der Vergangenheit vielmals erprobt und als gewinnbringend eingestuft (siehe etwa (Jahnke, 1991) und (Nickel, 2013)).

Das historisch-genetische Prinzip

Der Unterricht nach dem historisch-genetischen Prinzip wird als ”authentisch und [im Hinblick] auf die kognitive Entwicklung der Lernenden [als] adäquat” (Vollrath/Roth, 2012, S. 116) wahrgenommen. Lernen soll ein aktiver Prozess sein, ”bei dem Wissen individuell und in Auseinandersetzung mit anderen Individuen konstruiert wird” (Reiss/Hammer, 2010, S. 79). Hierbei liegt der Fokus des genetischen Prinzips insbesondere auf ”einer Entwicklung, einer Dynamik, eines Prozesses” (Stampe, 1984, S. 83) und genügt dieser Anforderung dementsprechend sehr gut. Insbesondere ”durch die Schilderung der Lebensumstände bedeutender Mathematiker[innen] und ihrer Leistungen [kann] ein Beitrag zur Persönlichkeitsentwicklung der Schülerinnen und Schüler geleistet werden” (Richter, 2011, S. 80).

Studie zu Hurwitz’ Fliege-Spinne-Problem

Im Frühjahr 2016 evaluierten wir eine Unterrichtsstunde, in welcher historische Materialien mit dem aktuellen Schulstoff verknüpft wurden (siehe (Hauck/Oswald, 2016)). In einer 9. Klasse (Realschule) wurde die Biographie des Mathematikers Adolf Hurwitz (1859 - 1919) sowie seine hinterlassenen 30 mathematischen Tagebücher, welche im Archiv der ETH Zürich verwahrt werden, vorgestellt. Im Folgenden erarbeiteten Lehrerin und SuS gemeinsam eine im 23. Tagebuch notierte Aufgabe: ” In einem Zimmer von der Höhe 12m, der Breite 12m und der Länge 36m sitzen auf gegenstehenden Wänden in der Mittellinie derselben eine Fliege F und eine Spinne S, F 3m von der Decke, S 3m vom Fussboden. Die Fliege sagt zur Spinne: Wenn Du zu mir kommst, ohne einen Weg von 48 oder gar mehr Metern zu durchkriechen, so bleib ich sitzen und Du fängst mich; wenn Du aber 48 oder mehr Meter gebrauchst, so fliege ich fort, ehe Du zu mir kommst. Wie muss die Spinne kriechen, um die Fliege zu erhalten?” (Hurwitz, 1985, Nr. 23, S. 1)

Es wurden sowohl die besondere Quellenlage (Entziffern der originalen alten Handschrift) wie auch die schrittweise Lösungsfindung (Veranschaulichung der Oberfläche als ebenes Netz und Anwenden des bereits bekannten Satzes von Pythagoras) im Zwiegespräch behandelt. Eine anschließende qualitative Evaluation der Schulstunde offenbarte, dass sich insbesondere die Verknüpfung des eigenständigen Lösungsprozesses anhand eines realen historischen Notiz- bzw. Tagebuchs mit der kürzlich erlernten Mathematik als bemerkenswert erfolgreich erwies. Alle definierten Lernziele wurden erreicht und die SuS arbeiteten hochmotiviert an der Auseinandersetzung mit dem Entwicklungsprozess von Mathematik. Dies bestätigte, dass die ”konzeptuelle Entwicklung mathematikhistorischer und mathematikphilosophischer Bezüge komplex [ist] und deshalb einer gewissen interdisziplinären Vorbereitung [bedarf].” (Vargas/Weiss-Pidstrygach, 2015, S. 280)

2. Vorstellung eines weiteren Tagebucheintrags

Im Folgenden wird ein weiterer Tagebucheintrag (siehe auch (Oswald, 2014)) erläutert und implizit dessen Potential für den Mathematikunterricht vorgestellt. Im 22. Buch, am 24. Dezember 1907, notierte Hurwitz: ”Faltconstruktion des goldenen Schnittes und des regulären Fünfecks. Gestern war ich beim Lehrer Oertli, um mir für Otto zu Weihnachten Aufklärung über die in Oertli’s Schrift enthaltenen Papierfaltübungen geben zu laßen. Dadurch bin ich auf die Beschäftigung mit Faltconstruktionen gekommen.” (siehe Abb. 1)

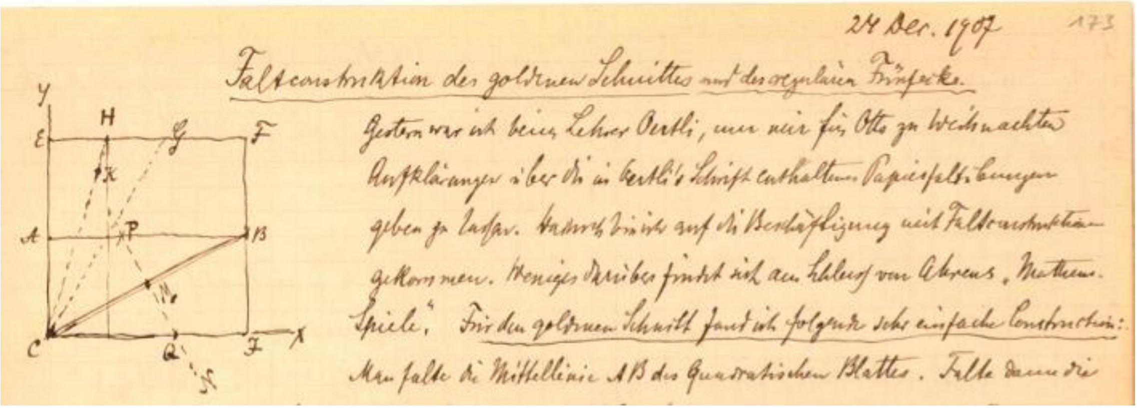

Abbildung 1: Passage aus (Hurwitz, 1985, Nr. 22, S. 173).

Hurwitz fuhr fort: ”Für den goldenen Schnitt fand ich folgende sehr einfache Construction: Man falte die Mittellinie AB des quadratischen Blattes. Falte dann die Diagonale CB, und die Halbierungslinie CG des Winkels ECB (indem man CE auf CB legt). Dann wird EF im Punkte G geteilt.“ Mit Hilfe elementar-geometrischer Methoden bewies Hurwitz, dass das gefaltete Verhältnis tatsächlich dem goldenen Schnitt entspricht. Er stellte die Gleichung von CB auf:

$$y = \frac{1}{2}x \quad \text{oder} \quad \frac{x-2y}{\sqrt{5}} = 0$$

und beschrieb durch eine ’Normierung’ derselben eine darauf liegende Strecke der Länge 1. Dies entspricht der Länge von CE für die Hurwitz die entsprechende ”Gleichung von CE: x = 0” aufstellte. Durch Summation der beiden bestimmt er anschließend die Winkelhalbierende CG (siehe Abb. 2):

$$\frac{x-2y}{\sqrt{5}} + x = 0 \Leftrightarrow x - 2y + \sqrt{5}x = x(\sqrt{5}+1) - 2y = 0.$$

Modern ausgedrückt entspricht dies der Normierung zweier Vektoren sowie der gewohnten Methode durch deren Summation die Winkelhalbierende zu bestimmen.

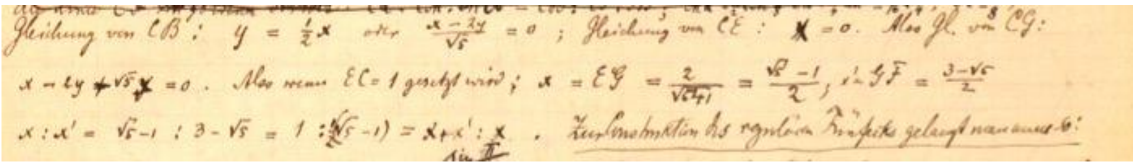

Abbildung 2: Wenn EC = 1 gesetzt wird;

$$x = EG = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}; x' = GF = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$x : x' = \sqrt{5}-1 : 3-\sqrt{5} = 1 : \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = x + x' : x.$$

Diese einfache Papierfaltkonstruktion des goldenen Schnittes war Hurwitz’ Ausgangspunkt für eine Konstruktion des regulären Fünfecks. Je nach gewünschtem Schwierigkeitsgrad kann diese mit elementaren Argumenten und unter Einbeziehung weiterer Materialien diskutiert werden.

3. Anwendung in Unterrichtseinheiten

Die beiden obigen Fallbeispiele unterstreichen, dass es vielfältige Einsatzmöglichkeiten von Mathematikgeschichte und Bezügen zu Mathematiker_innen der Vergangenheit im dynamischen und interaktiven Mathematikunterricht gibt. Darüber hinaus kann die Beschaffung von historisch relevanten Materialien sehr niedrigschwellig sein. Die Tagebücher von Hurwitz stehen etwa öffentlich in digitalisierter Form auf dem Portal e-manuscripta.ch zur Verfügung. Unserer Erfahrung nach, sind SuS durchaus bestrebt, Mathematik eingebettet in ihrer Genese und spezifischen Denkweise zu erlernen. Insgesamt vertreten wir die These, dass der positive Einfluss von Mathematikgeschichte im Unterricht insbesondere greift, wenn insbesondere das Potential der ”Lebendigkeit” und Dynamik ausgeschöpft wird.

Literatur

Jahnke, H. N. (1991). Mathematik historisch verstehen – oder: Haben die alten Griechen quadratische Gleichungen gelöst? *Mathematik lehren* 47, 6 – 12.

Nickel, G. (2013). Vom Nutzen und Nachteil der Mathematikgeschichte für das Lehramtsstudium. *GDM-Mitteilungen* 95, 24 – 31.

Hauck, S. & Oswald, N.M.R. (2016). Sagt die Fliege zur Spinne.... Zum historisch-genetischen Prinzip im Schulunterricht. *Mathematik im Unterricht* (Heft Nr. 7)

Hurwitz, A. (1985). Die Mathematischen Tagebücher und der übrige handschriftliche Nachlass von Adolf Hurwitz, *Handschriften und Autographen der ETH-Bibliothek* 53 Hs 582: 1 – 30. Abrufbar unter http://www.e-manuscripta.ch/.

Oswald, N.M.R. (2014). Adolf Hurwitz faltet Papier. *Mathematische Semesterberichte* 62(2), 123 - 130 (DOI 10.1007/s00591-014-0139-z)

Reiss, K. & Hammer, C. (2013). *Grundlagen der Mathematikdidaktik: Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe.* Basel: Birkhäuser.

Richter, K. (2011). Historische Aspekte im Mathematikunterricht. In: Herget, W. / Schöneburg, S. (Hrsg.). *Mathematik – Ideen – Geschichte. Anregungen für den Mathematikunterricht.* Hildesheim: Franzbecker.

Stampe, E. (1984). *Repetitorium Fachdidaktik Mathematik.* Bad Heilbrunn/Obb.: Klinkhardt.

Vargas, E. & Weiss-Pidstrygach, Y. (2015). Um welche Flächen geht es beim Sehnensatz? Entdeckendes Lernen in der Lehramtsausbildung. *Mathematica didactica* 38, 274 – 301.

Vollrath, H.-J. & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe.* Heidelberg: Spektrum.