

Visualisierung in dynamischer Geometrie – Aufgabenbasiertes Lernen aus unsichtbaren Objekten

In diesem Beitrag stelle ich Ergebnisse aus einem Unterrichtsexperiment in Geometrie vor, das in einer 9. Klasse durchgeführt wurde. Für dieses Unterrichtsexperiment habe ich Geometrieaufgaben in einer Dynamischen-Geometrie-Software (DGS) entworfen. Die Idee hinter der vorgestellten Studie könnte durch folgende Frage ausgedrückt werden: „Was passiert, wenn wir SchülerInnen auffordern, Geometrieaufgaben in einer DGS zu lösen, in denen das Abbild des zu untersuchenden geometrischen Körpers für sie unsichtbar ist?“ Ziel dieses Beitrags ist es zu untersuchen, wie Visualisierung und Argumentation in 3D-DGS-Aufgaben verwoben sind und wie die Visualisierung der SchülerInnen durch die Verwendung von Aufgaben mit spezifischen Merkmalen gefördert werden kann.

Das Zusammenspiel zwischen Visualisierung und Argumentation

In dieser Arbeit wird der kognitive Teil der Visualisierung betont, da Argumentationen im Vordergrund stehen. Duval (2005) klassifiziert die Visualisierung in zwei Kategorien, *iconic* und *non-iconic visualization*. In *iconic visualization* „the drawing is a true physical object, and its shape is a graphic icon that cannot be modified. All its properties are related to this shape, and so it seems to be very difficult to work on the constitutive parts of it“ (Mithalal, 2009, S. 797). In *non-iconic visualization* „the figure is analysed as a theoretical object represented by the drawing, using three main processes:

Instrumental deconstruction: in order to find how to build the representation with given instruments.

Heuristic breaking down of the shapes: the shape is split up into subparts, as if it was a puzzle.

Dimensional deconstruction: the figure is broken down into *figural units* — lower dimension units that figures are composed of —, and the links between these units are the geometrical properties“ (ebd., S. 797).

Ein kontinuierliches Zusammenspiel zwischen Argumentation und Visualisierung ist notwendig, damit die geometrischen Argumentationen der SchülerInnen entwickelt werden können. Der Einsatz von Aufgaben in der DGS stärkt dieses Zusammenspiel, denn der Einsatz von DGS kann die Visualisierungsfähigkeiten (siehe z.B. Christou et al., 2006) und die geometrische Argumentation (siehe z.B. Healy & Hoyles, 2002) der SchülerInnen fördern.

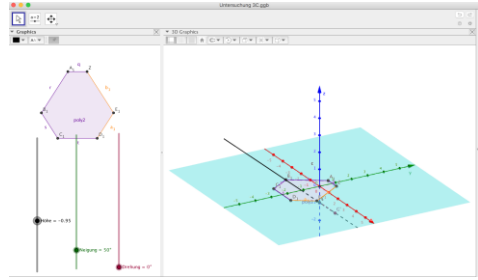
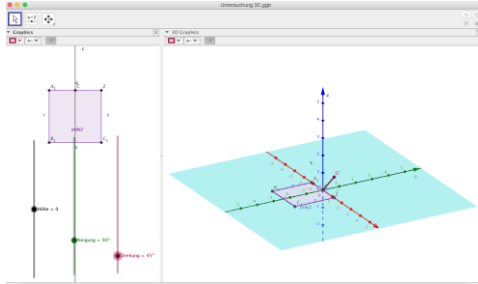
Beschreibung der Aufgaben und des Unterrichtsexperimentes

Das Design (die Charakteristiken) der Aufgaben hat zum Ziel, die SchülerInnen dazu herauszufordern, Vermutungen herzustellen und anhand von Strategien zu überprüfen, die über die *iconic visualization* und naive empirische Rechtfertigungen hinausgehen. Stattdessen sollen die SchülerInnen sich naturgemäß in mathematischer Aktivität engagieren, die *non-iconic visualization* und Argumentationen beinhaltet. Die Aufgaben beinhalten Übergänge von zweidimensionalen (2D) und dreidimensionalen (3D) geometrischen Objekten (und umgekehrt) und sie sind so entworfen, dass sie Überraschung, Ungewissheit oder einen kognitiven Konflikt für die Schülerinnen und Schüler schaffen sollen (Hadas et al., 2000; Healy & Hoyles, 2002). Wegen dieser Übergänge zwischen Objekten unterschiedlicher Dimensionen habe ich diese Aufgaben *D-transitional* Aufgaben genannt. Im Umgang mit den Aufgaben dieser Studie stehen SchülerInnen Situationen gegenüber, in denen die Querschnitte, die sie beobachten, nicht ihren ersten Erwartungen entsprechen.

Fünf *D-transitional* Aufgaben wurden in der *3D-Grafik* von GeoGebra 5 entworfen. In jeder Aufgabe ist das GeoGebra-Fenster in zwei Unterfenster unterteilt. Im rechten Unterfenster gibt es ein 3D-Koordinatensystem, in dem ein Körper „versteckt“ ist, und eine blaue Ebene, die durch die Achsen x und y definiert ist. Mit drei Schieberegler können die SchülerInnen Höhe, Neigung und Drehung manipulieren, um den Körper zu bewegen. Es wird außerdem die Schnittfläche des Körpers mit der blauen Ebene als 2D-Darstellung angezeigt. (siehe Abbildungen in Tabelle 1). Den SchülerInnen wurde die Frage gestellt: „Könnt ihr anhand der „Spuren“, die ihr bis hierhin gesammelt habt, den unsichtbaren Körper identifizieren?“ Mit dem Wort „Spuren“ sind die Eigenschaften und Merkmale der verschiedenen Schnittflächen gemeint, die durch die Veränderung der drei Schieberegler sichtbar werden. Das Unterrichtsexperiment wurde von der Forscherin entworfen und von einem Lehrer als Teil seines Geometrieunterrichts umgesetzt. 24 SchülerInnen einer 9. Klasse nahmen teil. Die SchülerInnen wurden gebeten, so explizit wie möglich in ihren Erklärungen zu sein und mathematische Argumente zu nutzen, um den MitschülerInnen ihre Antworten in der Plenumsdiskussion zu präsentieren.

Erste Daten

Ich präsentiere und diskutiere in diesem Artikel erste Auszüge der Zusammenarbeit von Gabriel und Elbert (siehe Tabelle 2). Die Schüler begannen mit einer freien Exploration der Situation und nutzten die Hilfestellung auf dem Arbeitsblatt nicht.

Dialog	Abbildungen, Kommentare und Analyse
<p>G: Holy ****. Was ist das denn? Müsste symmetrisch sein.</p> <p>E: Es würde auch ein Würfel passen. Ändere Mal die Höhe. Mach auf null (<i>die Neigung</i>) und ändere die Höhe. Nach unten.</p> <p>E: Ay ay ay.</p> <p>G: Wir sind beim diagonalen Querschnitt, das ist kein</p> <p>E: Kein Würfel (lachen)</p> <p>G: Kein Würfel. (...) Oder?</p>	<p>Gabriel scheint überrascht als er beginnt, die durchgeführten Querschnitte durch die blaue Ebene auf dem Körper zu explorieren. Die erste Vermutung der Schüler ist, dass der unsichtbare Körper ein Würfel sei. Aufgrund unerwarteter Querschnitte (Fünfecke, Sechsecke) halten sie ihre erste Visualisierung für unzureichend. Sie zweifeln an ihrer Vermutung.</p> 
<p>E: Die untere Fläche ist sicher quadratisch. Das haben wir ja geguckt.</p> <p>G: Mhm (<i>bejahend</i>)</p> <p>E: Die Obere Fläche ist auch quadratisch. Also könnte es ein Würfel sein, es könnte –</p> <p>[...]</p> <p>E: Das würde hinhauen, wenn es ein Würfel ist, aber es könnte auch ein, ein Dingsens sein. Wie heißt das nochmal? Prisma.</p> <p>[...]</p> <p>G: Das wäre dann ein Quader.</p>	<p>Jetzt beginnen sie einer strukturierten Exploration, indem sie einige <i>figural units</i> des verborgenen Körpers identifizieren. Sie betrachten die Eigenschaften der Querschnitte des Körpers und übertragen diese auf den verborgenen Körper. An diesem Punkt stellen sie fest, dass sie aus den bisher gesehenen Merkmalen und Eigenschaften der Querschnitte nur argumentieren können, dass der Körper ein Quader ist. Ob er ein Würfel ist, bleibt unklar. Obwohl sie sich von der <i>iconic visualization</i> zur Identifizierung von <i>figural units</i> des Körpers und einigen ihrer Eigenschaften bewegt haben, haben sie noch nicht das Niveau der dimensional Dekonstruktion erreicht.</p>
<p>E: Nein, das ist so. Alles andere macht keinen Sinn. Wir haben eine Höhe von 2,35; ne Breite von 2,35 und eine Länge von 2,35.</p> <p>G: Na gut.</p> <p>E: Das ist ein Quadrat. Äh, ein Würfel.</p> <p>[...]</p> <p>G: Ja wie wir nachgewiesen haben, dass der Grundfläche ist quadratisch. Das haben wir hier ja nachgewiesen. Aber Länge, Breite und Höhe gleich sind, haben wir nur nachgewiesen, weil wir ne Neigung verändert haben und... sich das Objekt bei 90, 180, 270 und 360 und null... immer ein Quadrat war. Nur um die Achse gedreht (<i>die Symmetrieachse</i>)</p>	<p>Die Schüler kommen zu dem Schluss, dass ihre Vermutung zutreffend war. Sie stützen ihre Begründung auf Argumente, die die Eigenschaften sowohl des unsichtbaren Körpers als auch der sichtbaren Querschnitte miteinander verknüpfen.</p> 

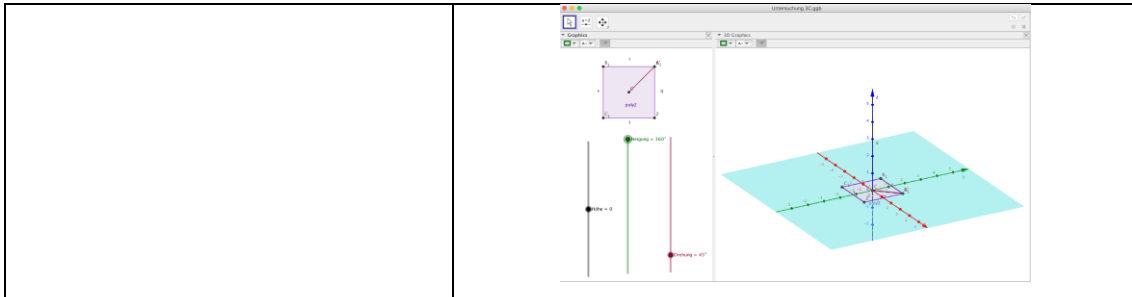


Tabelle 1: Auszüge der Zusammenarbeit von Gabriel und Elbert

Gabriel und Elbert wollten zu einer für sie befriedigenden Begründung ihrer Vermutung kommen. Die Art der Aufgabe und ihre zunächst „unorganisierte“ Exploration der Situation, haben früh zu Überraschung und einem kognitiven Konflikt geführt. Die Schüler haben begonnen, an ihrer Vermutung zu zweifeln, und sie haben selbstständig eine tiefere Exploration begonnen, in der sie von der *iconic visualization* zur Identifizierung von *figural units* des Würfels und seinen Eigenschaften fortgeschritten sind. Sie haben ihre Argumentation anhand von Eigenschaften der Querschnitte und Eigenschaften des Würfels sowie der Abhängigkeiten zwischen beiden begründet. Am Ende haben sie die Rekonstruktion des unsichtbaren Würfels durch die dimensionale Dekonstruktion seiner *figural units* und der 2D-Querschnitte erreicht. Sie haben erst dann gestoppt und ihre Vermutung als wahr angenommen, als sie eine Argumentation produziert hatten, die sie selbst als gültig ansahen. Allgemeinere Ergebnisse meiner Studie stehen noch aus. Beispiele wie das gezeigte demonstrieren aber, dass es möglich ist, Visualisierung und Argumentation von SchülerInnen in der Geometrie mit den in diesem Beitrag gezeigten Arten von *D-transitional* Aufgaben zu unterstützen.

Literatur

- Christou, C., Jones, K., Mousoulides, N. & Pittalis, M. (2006). Developing the 3DMath dynamic geometry software: theoretical perspectives on design. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 13, 4, 168–174.
- Duval R., 2005. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de didactique et de sciences cognitives* Vol.10, pp.5-53.
- Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-2), 127–150.
- Healy, L., & Hoyles, C. (2002). Software tools for geometrical problem solving: Potentials and pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(3), 235–256.
- Mithalal, J. (2009). 3D geometry and learning of mathematical reasoning. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME6* (pp. 796–805). Lyon, France: INRP.