

Aspekte des Wissens und Könnens der elementaren Algebra

Einleitung

Um in MINT-Fächern in Schule und Hochschule erfolgreich zu sein ist das Beherrschen von formaler Algebra unverzichtbar. Was das bedeutet, dazu gibt die Fachdidaktik sehr differenziert Antwort. Um die fachdidaktischen Positionen in Diskussionen zwischen Lehrenden aus Schule und Hochschule nachvollziehbar darzustellen, wurde eine umfassende und systematische Übersicht über die unterschiedlichen Aspekte des Algebrakönnens entwickelt. Dieser Beitrag beschreibt den Prozess der Modellentwicklung und stellt das Modell in seiner derzeitigen Form vor.

Entwicklung einer ersten, literaturbasierte Version

Das Ziel der ersten Phase der Modellentwicklung war, wesentliche Aspekte des Algebrakönnens, beginnend mit Küchemanns Artikel zum Variablenverständnis (1978), strukturiert zusammenzustellen. Die Zusammenstellung erfolgte durch Bildung von Kategorien, die sich in einer von zwei a-priori formulierten „Dimensionen“ aufgespannten Tabelle darstellen lassen: Die eine umfasst Tätigkeiten des „sinnstiftenden Umgangs“ mit formaler Algebra, und zwar im Sinne von Arcavis „making sense of algebra“ (1994). Die andere umfasst Elemente der schulischen, formalen Algebra, die Gegenstand dieses sinnstiftenden Umgangs sind. Beide Dimensionen spiegeln die Perspektiven wider, die von Akteuren beiderseits der Schnittstelle eingenommen werden: Die fachliche Perspektive ergibt sich aus der Nennung der mathematischen Inhalte, die didaktische aus der differenzierten Beschreibung involvierter Fähigkeiten.

		Sinnvoller Umgang mit... ...Elementen der Algebra			
		Wieder- geben	Um- formen	Struktu- rieren	innermath. Deuten
Variable		no meaningful aspects			(5) Variablen deuten
	Parameter				(6) Parameter identifizieren
Term		(1) Umformungs- regeln angeben	(2) mithilfe gegebener Regeln umformen	(3) Term- oder Gleichungstyp erkennen	(7) Terme oder Gleichungen aufstellen
	Gleichung			(4) Gleichwertigkeit unmittelbar erkennen	(8) zwischen Term oder Gleichung und Tabelle bzw. Graph wechseln
				(10) Gleichungs- zeichen deuten	

Abbildung 1 Literaturbasiertes Modell zum algebraischen Wissen und Können

Modifikationen auf Basis einer Expertenbefragung

Zur Validierung dieser ersten literaturbasierten Version wurde eine Expertenbefragung vorgenommen. Im Multimatrixdesign (vgl. Zendler, Vogel & Spannagel, 2013) organisiert umfasste sie Fragen zum Modell und zu den 48 Items einer begleitenden Testbatterie, letztere so verteilt, dass jedes Item 50% der befragten Experten vorlag. Von den angesprochenen 24 Experten – alle haben im deutschsprachigen Raum auf dem Gebiet des Lehrens und Lernens von Algebra mehrfach publiziert – haben zwölf die Befragung vollständig bearbeitet. Die Antworten wurden in Form eines ergebnisoffenen mehrstufigen Clusterverfahrens (Corbin & Strauss, 1990) zusammengefasst. Es ergaben sich vier Kategorien: Beiträge (a) zur Klärung des theoretischen Rahmens des Modells, (b) zur Restrukturierung des Modells, (c) für die Neuformulierung einzelner Aspekte im Modell und (d) zu einzelnen Batterieitems. Zum Beispiel betrafen Beiträge unter (a) das Verhältnis unseres Modells zu existierenden Theorien des Verstehens oder zur Rolle präformaler Zugänge zur Algebra, oder Beiträge unter (b) wiesen auf die zentrale Rolle des Erfassens einer Termstruktur hin, die dem Umformen eines algebraischen Ausdrucks oder dem algebraischen Modellieren von Zusammenhängen vorangehen muss. Auch wurde deutlich, dass manche Experten die Teiltätigkeit (2) aus dem ersten Entwurf anders als angenommen als die generelle Fähigkeit für korrektes Umformen fehlinterpretierten.

Die revidierte Fassung

Die Beiträge wurden, so wie in den Kategorien erfasst, von den Autoren dahingehend beurteilt, ob und wie diese in einer Revision des Modells berücksichtigt werden. Dieses stellt sich in Abbildung 2 nun so dar:

	Wissen		Können			
			Strukturieren			
(Sum) Sinnstiftender Umgang mit... ...Elementen der Algebra (EdA)			Transformieren		Interpretieren	
Variable inkl. Parameter	keine sinnvollen Wissens- oder Könnensaspekte formulierbar		(3) Umformungsmöglichkeiten erkennen	(4) Operationale Hierarchien erkennen	(7) Variablen und Parameter deuten	
Terme und Gleichungen	(1) Bezeichnungen und Umformungsregeln angeben	(2) mithilfe gegebener Regeln umformen	(5) berechnen oder vergleichen		(8) zwischen algebraischen Ausdrücken und innermathematischen Situationen wechseln	
	(6) (effizient) umformen				(9) zwischen algebraischen Ausdrücken und Tabellen bzw. Graphen wechseln (10) zwischen algebraischen Ausdrücken und außermathematischen Situationen wechseln	

Abbildung 2 Das aufgrund einer Expertenbefragung revidierte Modell

Zu den Einträgen im Einzelnen. Beispielaufgaben fehlen aus Platzgründen:

Wissen: Wichtige Bezeichnungen und Umformungsregeln werden angegeben oder identifiziert. Transformieren: Ein algebraischer Ausdruck wird strukturverändernd umgeformt (transformational equivalence: Musgrave et al., 2005; treatment: Duval, 2006). Strukturieren: Ein algebraischer Ausdruck wird strukturerhaltend gedeutet oder verändert (substitutional equivalence: Musgrave et al., 2005; Rüede, 2015) Interpretieren: Eine nichtalgebraische Situation wird durch einen algebraischen Ausdruck beschrieben und umgekehrt (conversion: Duval, 2006)

Variable inkl. Parameter: Variablen sind Zeichen, die Zahlen und Größen repräsentieren. Parameter sind Variablen, die über Wertemengen anderer Variablen variieren (Veränderliche vs. Einzelzahl: Malle, 1993, Variable vs. Metavariablen: Drijvers, 2001; values taken by a variable: Bardini et al., 2005). Diese Unterscheidung ergibt sich aus dem Aufgabenkontext. Terme und Gleichungen: Gleichungen sind Ausdrücke, in denen zwei Terme hinsichtlich ihrer Wertigkeit verglichen werden, symbolisiert durch ein Gleichheitszeichen. Eine Gleichung unterscheidet sich von einer Berechnung oder Termumformung dadurch, dass das Gleichheitszeichen im Sinne eines Vergleiches gedeutet wird (notion of equivalence: Kieran, 1981; operational vs. relational view: Baroody & Ginsburg, 1983; Zuweisungs- vs. Vergleichszeichen: Malle, 1993).

(1) Bezeichnungen und Umformungsregeln angeben: Als wichtig erachtete Bezeichnungen für algebraische Ausdrücke sowie Term- und Gleichungsumformungsregeln werden angegeben oder identifiziert. (2) mithilfe gegebener Regeln umformen: Terme und Gleichungen werden mithilfe gegebener Regeln in äquivalente Terme bzw. Gleichungen umgeformt (manipulation skills: Hoch & Dreyfus, 2006) (3) Umformungsmöglichkeiten erkennen: Ein Ausdruck wird als Vertreter einer Klasse gleichartiger Ausdrücke und damit assoziierter Eigenschaften erkannt, insbesondere Umformungsmöglichkeiten. Dies geschieht durch gedankliche oder explizite Substitution von Variablen oder Teiltermen durch Terme oder Variablen (systemic structure: Kieran, 1989; structure sense: Hoch & Dreyfus, 2006). (4) Operationale Hierarchien erkennen: Die logische Ordnung der in einem Term enthaltenen Rechenoperationen wird erkannt. Dies geschieht durch gedankliche oder explizite Substitution durch Variable von Teiltermen (surface structure, Kieran, 1989; Rechenschema: Vollrath & Weigand, 2006; Rechenhandlung: Malle, 1993) (5) berechnen oder vergleichen: Ein Ausdruck mit Gleichheitszeichen wird situationsangemessen als Zuweisungs- bzw. Rechenhandlung oder als Wertevergleich gedeutet (Malle, 1993; operational vs. relational view: Ba-

roody & Ginsburg, 1983; Knuth, Alibali & al., 2006). (6) (effizient) umformen: Terme und Gleichungen werden bei Aktivierung vorhandenen Wissens über Regeln (1), die in der vorliegenden Situation als anwendbar erkannt werden (3), in äquivalente Terme bzw. Gleichungen umgeformt ((2),(4)). Dies geschieht auch, indem zwei Terme oder Gleichungen „auf Anhieb“ ohne explizite rechnerische Überprüfung als gleichwertig erkannt werden (algebraic expectation: Pierce & Stacey, 2001). Effizient ist solches Umformen dann, wenn hierfür unter mehreren denkbaren Möglichkeiten eine gewählt wird, die nur wenige Berechnungen und Schritte zur Lösung benötigt (strategic flexibility: Rittle-Johnson & Star, 2009; strukturelle Bezüge zweiter Ordnung: Rüede, 2015; vgl. auch Malle, 1993, S.188ff.). (7) Variablen und Parameter deuten: Variablenzeichen werden als Repräsentanten von Zahlen gedeutet oder verwendet (Küchemann, 1978; Einsetzungs- und Gegenstandsaspekt: Malle, 1993; Platzhalter vs. Bedarf: Griesel, 1982). Dabei werden für den Kontext geeignete Variablen als Parameter behandelt. (8) zwischen algebraischen Ausdrücken und innermathematischen Situationen wechseln: Eine nichtalgebraische, innermathematische Situation, wie zum Beispiel ein Punktmuster oder eine geometrische Konfiguration, wird durch einen Term oder eine Gleichung beschrieben und umgekehrt (Bauplan: Vollrath & Weigand, 2009). (9) zwischen algebraischen Ausdrücken und Tabellen bzw. Graphen wechseln: Ein Term oder eine Gleichung wird in eine Wertetabelle bzw. einen Graph übersetzt oder umgekehrt (McGregor & Stacey, 1995), z.B. bei funktionaler Interpretation eines Terms (conversion: Duval, 2006) oder zur Lösung einer Gleichung (Arcavi, 1994). (10) zwischen algebraischen Ausdrücken und außermathematischen Situationen wechseln: Algebraische Ausdrücke werden in Realsituationen übersetzt oder umgekehrt (McGregor & Stacey, 1995; Heid, 1996), z.B. bei funktionaler Interpretation eines Terms (Nitsch, 2015). Sie unterscheidet sich von einer innermathematischen Deutung ((7),(8),(9)) in einem höheren „Abstraktionsgefälle“ zwischen einer konkret anschaulichen und der notwendigen abstrakt formalen Strukturierung der Realsituation (Malle, 1993).

Ausblick

Gegenwärtig sind weitere Maßnahmen zur empirischen Absicherung der Inhaltsvalidität sowie unter Einsatz einer erweiterten Testbatterie zur Konstruktvalidität geplant. Mittelfristiges Ziel ist die Entwicklung eines Diagnoseinstruments, das für die Konzeption differenzierter Unterstützungsmaßnahmen beiderseits der Schnittstelle eingesetzt werden kann.

Literatur

Eine vollständige Literaturliste stellen die Autoren auf Anfrage bereit.