Melanie PLATZ, Universität Siegen, Miriam KRIEGER, Universität Flensburg, Engelbert NIEHAUS, Universität Koblenz-Landau, Kathrin WINTER, Universität Flensburg, DE

Distraktorenermittlung für elektronische Beweise in der Lehre

Eine erste Version eines E-Beweis-Systems wurde mit dem Ziel entwickelt, einerseits Lehramtsstudierende beim Erwerb von Argumentationskompetenzen zu unterstützen, die andererseits Schüler/-innen altersadäquate Argumentationskompetenzen vermitteln können sollen. Im Sinne dieser Unterstützung werden Distraktoren aus papierbasierten Studierendenlösungen zu grundlegenden Beweisaufgaben für das System abgeleitet und im System auf ihre Wirksamkeit getestet.

1. Einleitung

In der Mathematikdidaktik spielt die Vermittlung von Argumentationskompetenzen eine große Rolle. Diese bilden die Basis für das in höheren Klassenstufen in unterschiedlichen Kontexten thematisierte Beweisen mathematischer Aussagen und Zusammenhänge. Um einerseits Lehramtsstudierende beim Erwerb von Argumentationskompetenzen zu unterstützen und um andererseits Schüler/innen altersadäquate Argumentationskompetenzen vermitteln zu können, werden webbasierte Ansätze zur Umsetzung von Distraktoren in E-Beweis-Systemen analysiert. In diesem Kontext stellt die Ermittlung von Distraktoren beim Beweisen einen ersten Schritt dar. Eine Pilot-Studie zur Distraktorenermittlung wird im Folgenden vorgestellt. Im Rahmen des Projekts „QED“ wurde ein erster Prototyp für ein E-Proof-System entwickelt (http://e-beweise.weebly.com/). Ziel der Verwendung eines E-Proof-Systems ist die Schrittweise Heranführung der Lernenden an einen selbst erstellten Beweis mit Stift und Papier (Paper&Pencil) ohne jegliche Hilfestellungen. Dabei ist das E-Proof System als Interpolationshilfe zwischen einem fertigen Beweis in einem Buch und dem selbst erstellten Paper&Pencil-Beweis anzusiedeln. In einem ersten Schritt kann der Beweis schrittweise am PC nachvollzogen werden [vgl. ALCOCK & WILKINSON, 2011], anschließend sollen Beweisfragmente geordnet werden [Beweispuzzle, vgl. ENSLEY & CRAWLEY, 2006] und schließlich können falsche Beweisfragmente hinzugefügt werden, die durch die Diagnose von typischen Fehlern bei den Studierenden ermittelt werden [vgl. u.a. WINTER, 2011]. Auf diesem Weg werden die Freiheitsgrade erhöht, aber auch der Korrekturaufwand.

2. Untersuchung

Ziel ist Aufbauend auf einer Explorativen Pilot-Studie zur Ermittlung von Distraktoren [PLATZ & NIEHAUS, 2015] werden 144 Klausuren (Modulteilprüfungen) zur Veranstaltung „Fachwissenschaftliche Grundlagen“ von

Studierenden des Lehramts an Grund- und Föderschulen, Realschule Plus und Gymnasium und Zwei-Fach Bachelor der Universität Koblenz-Landau, Campus Landau, analysiert, sowie drei Klausuren von mathematisch begabten Schülerinnen, die die Veranstaltung im Rahmen eines Frühstudiums an der Schüleruniversität (https://www.uni-koblenz-landau.de/de/landau/fb7/mathematik/projekte/schueleruni) des Standorts Landau besucht haben. Die Veranstaltung Fachwissenchaftliche Grundlagen (Modul 1) ist im Bachelorstudium angesiedelt und sollte im ersten oder zweiten Studiensemester belegt werden. In der Veranstaltung soll ein vertieftes Verständnis elementarmathematischer Inhalte schaffen, die mathematische Denkweise, das mathematische Argumentieren und das Führen eines Beweises sollen erlernt werden und Beweistechniken sollen erworben werden. In der Klausur wurden Interpolationsbeweise zu den Themengebieten Mengen, Aussagen, aussagenlogische Formeln und Quantoren; einfache Beweise - logische Folgerungen und Schlussfiguren, Beweisprinzipien; Relationen (besonders Äquivalenz- und Ordnungsrelation); Abbildungen (besonders Injektivität, Surjektivität, Bijektivität); Gleichmächtige Mengen; vollständige Induktion abgefragt. Aus den Studierenden- und Schülerlösungen werden sowohl Distraktoren für das E-Proof System, als auch Hilfestellungen, die in dem E-Proof System die Lernenden beim Beweisen-Lernen unterstützen sollen, abgeleitet. Viele Studierende haben Probleme beim Beweisen. Bei einer Bestehensgrenze von lediglich 30 % haben 70% der teilnehmenden Studierenden die Klausur bestanden. Deshalb sollen die Studierendenlösungen auf typische Fehler untersucht werden, um die Beweise mit Distraktoren als e-Beweise in das E-Beweis-System zu implementieren und als Übungshilfe im kommenden Sommersemester 2017 and der Universität Koblenz-Landau einzusetzen. Methodisch ist diese Studie an [WINTER, 2011] angelehnt. In diesem Artikel soll die Aufgabe zu Gleichmächtigen Mengen herausgegriffen werden (siehe Abb. 1):

Aufgabe 5: (Gleichmächtige Mengen - 15 Punkte)
Ist die Menge $\mathbb{Z}$ abzählbar? Beweisen Sie Ihre Behauptung!
Hinweis: Folgende Mengen spielen ggf. eine Rolle im Beweis:
$2\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} : x = 2 \cdot k\}$ und $2\mathbb{N} - 1 := \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} : x = 2 \cdot k - 1\}$.

Lösung:
☐ ja ☐ nein

BEWEIS:

Abbildung 1: Aufgabenstellung: Gleichmächtige Mengen

Bei dieser Aufgabe wurde durchschnittlich 21,18 % der erreichbaren Punktzahl erreicht. Zunächst wurde der Beweis ohne Kenntnis der Studentenfehler in Beweisfragmente zerlegt, anschließend wurden die Studierendenlösungen analysiert.

3. Resultate

Folgende Studentenfehler konnten identifiziert werden:

- Nein angekreuzt mit „intuititver Begründung“ (2x): Die Menge der ganzen Zahlen ist nicht abzählbar, weil sie unendlich ist.
- Nein angekreuzt mit „mathematischer“ Begründung (3x): Die Menge der ganzen Zahlen ist nicht abzählbar, weil sie nicht gleichmächtig zu den natürlichen Zahlen ist, weil keine bijektive Abbildung zwischen den ganzen und den natürlichen Zahlen existiert.
- Nein angekreuzt mit einer Begründung, die auf dem Missverständnis des Hinweises beruhen (2x): Man kann jede beliebige ganze Zahl in die Menge 2N und 2N-1 einsetzen, dadurch werden die Mengen aber niemals abzählbar.
- Ja angekreuzt mit mathematischer Fehlvorstellung (1x): Die Menge der ganzen Zahlen ist abzählbar, weil es sich um eine endliche Menge handelt.
- Ja angekreuzt und Abbildung gefunden, die nicht bijektiv ist (22x): z.B.

<u>z.z.:</u> Die Abbildung

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad x \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x & , \textit{falls} \quad x \textit{ positiv} \\ -\frac{1}{2}(x-1) & , \textit{falls} \quad x \textit{ negativ} \end{cases}$$

ist bijektiv.

- Ja angekreuzt und Beweis durchgeführt, Fehler beim Beweis der Injektivität (aussagenlogische Begründung des Zutreffens des Falls x_1 gerade und x_2 ungerade oder umgekehrt (3x):

Es wird immer falsch und die Subjunktion wird immer wahr.

- Ja angekreuzt und Beweis durchgeführt, Fehler beim Beweis der Surjektivität: z.B. Sei x=6. f(6)=y <=> y=3, passt.
- Ja angekreuzt und Beweis durchgeführt, Fehler beim Beweis der Surjektivität, da vergessen wurde zu überprüfen, ob das gewählte x tatsächlich eingesetzt werden darf: z.B. Wähle x=2y.

4. Fazit

In dieser ersten Untersuchung konnten Studierendenfehler aus Studierendenlösungen ermittelt und als Distraktoren formuliert werden. Der Vergleich der ermittelten Distraktoren mit der initialen Zerlegung des Beweises ohne Kenntnis der Studierendenfehler, die relativ kleinschrittig war, lässt deutlich werden, dass die Beweiszerlegung im E-Beweis-System besonders für Beweisanfänger scheinbar noch keine optimale Übungshilfe leistet, wenn ein Auswendiglernen der einzelnen Beweisschritte vermieden werden soll. Der Fokus sollte mehr auf das Finden bzw. Verstehen der Beweisidee gelegt werden. Die tatsächlichen Studentenfehler unterscheiden sich von den erwarteten Studentenfehlern. Im nächsten Schritt sollen die ermittelten Distraktoren als Beweisfragmente in das E-Beweis-System implementiert werden und das System soll zur Unterstützung der Studierenden während dem nächsten Semester zur Veranstaltung „Fachwissenschaftliche Grundlagen" an der Universität Koblenz-Landau eingesetzt werden. Die Abschlussklausur wird abermals untersucht um Schlussfolgerungen ziehen zu können, ob das Hinzufügen authentischer Distraktoren zu einer Verbesserung der Beweiskompetenzen führt.

5. Literatur

Alcock, L. & Wilkinson, N. (2011). E-Proofs : Design of a Resource to Support Proof Comprehension in Mathematics. *Educational Designer*, Vol.1 (No.4). ISSN 1759-1325.

Ensley, D. E., & Crawley, J. W. (2006). *Discrete mathematics: mathematical reasoning and proof with puzzles, patterns, and games*. Wiley.

Platz, M., Niehaus, E. (2015). To "E" or not to "E"? That is the Question. Chancen & Grenzen eines E-Proof-Systems zur Förderung von Beweiskompetenzen. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015.*

Winter, K. (2011). *Entwicklung von Item-Distraktoren mit diagnostischem Potential zur individuellen Defizit- und Fehleranalyse. Didaktische Überlegungen, empirische Untersuchungen und konzeptionelle Entwicklung für ein internetbasiertes Mathematik-Self-Assessment.* WTM-Verlag. Münster.