

## **Analyse von Fehlerursachen auf drei Ebenen – Grundvorstellungen – concept image – Vorwissen**

### **Motivation**

Für den Mathematikunterricht existiert bereits eine große Vielfalt an Literatur, die sich mit Problemen, Fehlern und Fehlvorstellungen von Schülerinnen und Schüler zu bestimmten mathematischen Gebieten oder Begriffen beschäftigt (z. B. Padberg, 2009; Vinner & Dreyfus, 1989). Eine solche Analyse kann wichtige Hinweise für das Lehren und Lernen geben. Im Rahmen dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit Problemen Studierender an der Universität hinsichtlich des Verständnisses mathematischer Begriffe. Reelle Funktionen bieten dabei einen interessanten Ausgangspunkt für Untersuchungen, da sie einerseits eine Weiterführung der Schulmathematik darstellen, andererseits eine Grundlage für viele weitere Gebiete der Hochschulmathematik bilden. Nach einer Voruntersuchung stellte sich heraus, dass der Begriff des Extrempunkts für eine genauere Untersuchung besonders interessant ist, da Studierende Probleme mit diesem Begriff haben, und er für Teile der Mathematik, wie Optimierung, eine entscheidende Rolle spielt.

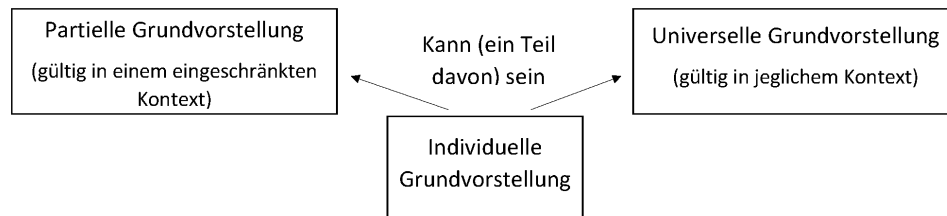
### **Theoretischer Hintergrund**

Da wir uns mit Problemen, also mit Fehlern und Fehlvorstellungen Studierender beschäftigen wollen, spielt das Konstrukt der Grundvorstellungen eine entscheidende Rolle (siehe dazu z. B. vom Hofe, 1992, 1995). Wir orientieren uns dabei an der Unterscheidung in *Aspekte* und *Grundvorstellungen* von Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand (2016b):

„Ein Aspekt eines mathematischen Begriffs ist ein Teilbereich des Begriffs, mit dem dieser fachlich charakterisiert werden kann.“ Und weiter: „Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt.“ (ebd., S. 17)

Weitere Zusammenhänge der beiden Begriffe werden bei Greefrath et al. (2016b, S. 16 ff.) deutlich. Sie unterscheiden dabei *individuelle* und *universelle* Grundvorstellungen. Während sich universelle Grundvorstellungen auf die von vom Hofe (1995, S. 123) skizzierte normative Ebene beziehen, also eine Leitlinie darstellen, was sich Lernende unter einem bestimmten Begriff idealerweise vorstellen sollen, beziehen sich individuelle Grundvorstellungen auf die Sicht des Lernenden. Für unsere Zwecke bietet es sich an, eine weitere Art von Grundvorstellungen zu betrachten, die wir als *partielle* Grundvorstellung bezeichnen. Während wir universelle Grundvorstellungen als in jeglichem Kontext gültige Vorstellung sehen, haben partielle Grundvorstellungen nur in einem eingeschränkten Kontext Gültigkeit. Trotzdem

kann auch eine partielle Grundvorstellung als ein (vorläufiges) Lernziel dienen. Ein Beispiel wäre die Vorstellung „Multiplikation vergrößert“, die nur in bestimmten Mengen, wie beispielsweise den natürlichen Zahlen (ohne die 1), valide ist. Eine individuelle Grundvorstellung kann dabei eine universelle oder partielle Grundvorstellung, oder ein Teil dieser beiden sein, was auch Abbildung 1 zeigt.



**Abbildung 1: Zusammenhang universelle, individuelle und partielle Grundvorstellung**

Wir sehen individuelle Grundvorstellungen als eine Komponente des *concept image* (vgl. Tall & Vinner, 1981) an (vgl. Greefrath et al., 2016a, S. 103). Unter dem Begriff *concept image* verstehen wir alle non-verbale Assoziationen, die ein Individuum mit einem Begriff verbindet. Abgesehen von Grundvorstellungen, möchten wir auch weitere Einflussfaktoren auf das *concept image*, wie beispielsweise Prototypen, mit in eine Diskussion über Fehlerursachen integrieren (vgl. Rembowski, S. 4). Unter einem Prototyp verstehen wir dabei *beste Beispiele einer Kategorie* (vgl. Lakoff, 1987, S. 7). Sowohl der Vorgang des Kategorisierens, als auch Begriff *Prototyp* und vor allem die Entstehung von Prototyp Effekten werden in der Psychologie und Linguistik heftig diskutiert. Wir wollen an dieser Stelle jedoch noch nicht näher darauf eingehen und verweisen z. B. auf Lakoff (1987), Rosch (1983) und Eckes (1991).

Ein weiterer Aspekt, den wir nicht außer Acht lassen wollen, ist das Vorwissen, das die Studierenden aus der Schule oder dem Alltag mitbringen. Dabei kann die *conceptual change* Theorie (vgl. z. B. Posner, Strike, Hewson & Gertzog, 1982) erste Ansatzpunkte liefern. Diese weist auch Verbindungen zum Grundvorstellungskonstrukt auf (vgl. vom Hofe & Blum, 2016, S. 237 f.).

## Forschungsfragen

Für unsere Arbeit stehen die folgenden drei Fragen im Mittelpunkt:

1. Welche Grundvorstellungen gibt es hinsichtlich des Begriffs Extrempunkt und inwiefern können diese helfen Probleme mit dem Begriff Extrempunkt einzuordnen?
2. Welche Fehler und Fehlvorstellungen haben Mathematikstudierende im Fach Analysis I bezüglich des Begriffs Extrempunkt?

3. Welche Ursachen könnten die Probleme hinsichtlich des Begriffs Extrempunkt haben und gibt es Verbindungen zwischen diesen?

## **Methodik**

Um die Forschungsfragen beantworten zu können, haben wir uns für die Methode der Leitfadeninterviews entschieden. Im Frühjahr 2016 wurden ca. zehn fokussierte Leitfadeninterviews mit Studierenden nach dem ersten Semester Analysis durchgeführt. In deren Mittelpunkt stand eine von den Studierenden im Vorfeld ausgefüllte schriftliche Befragung. Während des Interviews wurden auf die von dem jeweiligen Studierenden gegebene Antwort näher eingegangen. Dabei wurden diese von den Studierenden ausführlich erläutert und es wurden alternative Antworten von anderen Studierenden diskutiert. Die Interviews werden momentan ausgewertet.

## **Erste Ergebnisse**

Da die Arbeit noch im Entstehen ist, können wir bisher nur auf vorläufige Ergebnisse verweisen; hierbei wollen wir uns auf die dritte Forschungsfrage konzentrieren. Hinsichtlich dieser gilt es natürlich zu beachten, dass die Suche nach Ursachen für Fehler selten durch eine eindeutige Zuordnung eines Fehlers zu genau einer Ursache beschrieben werden kann. Im Gegenteil, häufig resultiert ein Fehler aus einer Vielzahl von Ursachen, die in unterschiedlich starkem Ausmaß für das Zustandekommen verantwortlich sind. Jeden einzelnen Einflussfaktor zu identifizieren scheint unmöglich. Wir konzentrieren uns daher auf mögliche Ansatzpunkte in den Interviews, die sich auf den von uns betrachteten theoretischen Hintergrund beziehen. Nach einer ersten Analyse der Interviewtranskripte scheint es sinnvoll zu sein, Ursachen auf drei Ebenen zu untersuchen.

1. Ebene: Untersucht die aufgetretenen Fehler vor dem Hintergrund der Grundvorstellungen. Es wird der Frage nachgegangen, inwieweit eine nicht sachgemäße Verwendung von Grundvorstellungen zu Fehlern führen kann. Ein Beispiel für eine mögliche Ursache ist dabei die Nutzung einer partiellen Grundvorstellung außerhalb ihres Gültigkeitsbereichs.
2. Ebene: Untersucht die aufgetretenen Fehler mit Hinblick auf andere Komponenten des concept images als mögliche Ursachen für Fehler. Beispielsweise möchten wir hier dem Einfluss von Prototypen für gewisse Funktionstypen nachgehen.
3. Ebene: Untersucht die aufgetretenen Fehler hinsichtlich ihres Entstehungshintergrundes und konzentriert sich dabei vor allem auf das Vorwissen aus der Schule und Alltagserfahrungen.

## Ausblick

In nächster Zeit ist eine Fertigstellung der Auswertung der Interviews geplant. Vor allem soll dabei eine Verknüpfung der verschiedenen Ebenen der Fehlerursachen untersucht werden und gegebenenfalls Verbindungen zwischen den Ebenen aufgezeigt werden.

## Literatur

- Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1989): The function concept in college students: Linearity, smoothness and periodicity. *Focus on learning problems in mathematics*, 5(3), 119-132.
- Eckes, T. (1991): *Psychologie der Begriffe: Strukturen des Wissens und Prozesse der Kategorisierung*. Göttingen: Hogrefe Verlag.
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, S., Ulm, V., Weigand, H.-G. (2016a): Aspects and “Grundvorstellungen” of the Concepts of Derivative and Integral Subject Matter-related didactical Perspectives of Concept Formation. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(1), 99-129.
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, S., Ulm, V., Weigand, H.-G. (2016b): *Didaktik der Analysis*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- Lakoff, G. (1987): *Women, Fire and Dangerous Things*. Chicago, London: The University of Chicago Press.
- Padberg, F. (2009): *Didaktik der Bruchrechnung*. Heidelberg: Springer Verlag.
- Posner, G., Strike, K., Hewson, P. & Gertzog, W. (1982): Accomodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education*, 66(2), 211-227.
- Rembowski, V. (im Druck): Concept Image und Concept Definition der Mathematikdidaktik von “Concept Image and Concept Definition in Mathematics”. In U. Kortenkamp & A. Lambert (Hrsg.) *Verfügbare digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht richtig nutzen*. Hildesheim: Franzbecker.
- Rosch, E. (1983): Prototype classification and logical classification: The two systems. *New trends in conceptual representation*, 73-86.
- Vom Hofe, R. (1992): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 13(4), 345-364.
- Vom Hofe, R. (1995): *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum Verlag.
- Vom Hofe, R. & Blum, W. (2016): “Grundvorstellungen” as a Category of Subject-Matter- Didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(1), 225–254.