

## Fach- und sprachintegrierte Förderung am Beispiel der Differentialrechnung

Die Koexistenz von Inhalt und Kalkül im Mathematikunterricht ohne Vernetzung ist ein Phänomen, das bereits oft beobachtet und empirisch belegt wurde. Auch in der Differentialrechnung bedeutet eine korrekte Kalkülbeherrschung der Lernenden noch lange nicht, dass sie tragfähige inhaltliche Vorstellungen entwickelt haben (Hahn 2008), was auch mit sprachlich bedingten Hürden zusammen hängen könnte. Daher zielt das Projekt MuM-Analysis darauf, fach- und sprachintegrierte Ansätze zur Differentialrechnung zu entwickeln und zu erforschen.

### Designprinzipien und ausdifferenzierte Darstellungsebenen

Für die Themen Brüche und Prozente wurde bereits nachgewiesen, dass eine integrierte Vorstellungs- und Sprachförderung maßgeblich zum erfolgreichen Auf- und Ausbau von konzeptuellem Verständnis beitragen kann (Wessel 2015, Pöhler & Prediger 2015). Dazu greifen diese Förderungen neben dem mathematikdidaktischen Prinzip *Inhaltliches Denken vor Kalkül* (vom Hofe 2013) auf zwei weitere Designprinzipien zurück: *Darstellungsvernetzung* (Leisen 2005), also die konsequente und wiederholte Vernetzung graphischer, symbolischer und verschiedener sprachlicher Darstellungen, und *Makroscaffolding* (Gibbons 2010) durch Verknüpfung des konzeptuellen Lernpfads mit einem sprachlichen Lernpfad, in dem die notwendigen Sprachhandlungen und Sprachmittel bereitgestellt werden.

Diese Designprinzipien werden nun auch für den Einstieg in die Differentialrechnung herangezogen, für die die Unterscheidung von formal- und bedeutungsbezogenen Sprachmitteln (Wessel 2015, S. 345) zentral ist. In den ersten Designexperimenten hat sich zudem gezeigt, dass die bedeutungsbezogenen Darstellungsebene für Funktionen weiter ausdifferenziert werden muss in drei Ebenen der bedeutungsbezogenen Sprachmittel: geometrische, kontextspezifische und kontextübergreifende Darstellungsebenen bieten jeweils eigene Sprachmittel, die wechselseitig nur begrenzt ersetzbar sind.



Abbildung 1: Modell der Sprach- und Darstellungsebenen

## Forschungsrahmen

Das Design-Research-Projekt (Prediger et al. 2012) verfolgt das doppelte Ziel, fach- und sprachintegrierte Förderansätze zu entwickeln und die initiierten Lernprozesse zu erforschen. Dazu werden insbesondere die konzeptuellen und sprachlichen Lernwege und Hürden zum konkreten Lerngegenstand untersucht.

Die zentrale Methode der Datenerhebung sind Designexperimente im Laborsetting, in den bisherigen zwei Zyklen mit 16 Paaren von Lernenden aus der Einführungsphase. Davon ausgewertet wurden bisher 350 min. Videos durch interpretative Rekonstruktion der individuellen Vorstellungs(-entwicklung) und Darstellungsebenen der genutzten Sprachmittel.

Die hier konkret dagezeigten Ausschnitte der Analysen gehören zu der Aufgabe aus Abb. 2 (aus Hahn 2008). Sie zielt auf die Initiierung konzeptueller und sprachlicher Lernprozesse durch Vernetzung von Darstellungsebenen aus Abbildung 1. Dabei werden inhaltliche Vorstellungen aktiviert (hier:

das Erfassen und graphische Darstellen einer gegensinnig orientierten Kovariation auf benachbarten Ableitungsebenen) und zum Anderen alltagssprachliche Sprachmittel eliziert, ohne ein explizites Angebot an Sprachmitteln zu geben.

24. Januar 2014
<b>Neuverschuldung gesunken</b> Jahrelang war die Neuverschuldung der Stadt Hamburg immer weiter angestiegen. Im vergangenen Jahr ist nun die Neuverschuldung erstmalig gesunken.
<ol style="list-style-type: none"><li>1. Welche Bedeutung hat diese Zeitungsmeldung für die Entwicklung von Hamburgs Schulden?</li><li>2. Beschreibe die Entwicklung von Hamburgs Schulden während der letzten Jahre.</li><li>3. Zeichne einen Graphen, der Hamburgs Schulden während der letzten Jahre angibt.</li></ol>

Abbildung 2: Aufgabe "Neuverschuldung gesunken"

## Empirischer Einblick in Lernprozesse zur gegensinnigen Kovariation

Der folgende Transkriptausschnitt zeigt exemplarisch tragfähige Vernetzungen, insbesondere zwischen den bedeutungsbezogenen Darstellungsebenen. Beim Bearbeiten der Neuverschuldungsaufgabe sollen Ela (E) und Laura (L) je einen Graphen zeichnen, der Hamburgs vorhandene Schulden in Abhängigkeit der Jahre darstellt. Beide haben jedoch einen Graphen gezeichnet, der die Neuverschuldung Hamburgs angibt. Dies macht die Verwechslung von Bestands- (Schulden) und Änderungsebene (Neuverschuldung) sichtbar (Hahn 2008). Denn das Sinken der Neuverschuldung bedeutet lediglich eine geringere Zunahme der Schulden. Die Interviewerin (I) stellt gezielt Rückfragen, um eine explizite Auseinandersetzung mit den Begriffen und den dahinterliegenden Konzepten herbeizuführen:

- 71 I Was steigt an und was sinkt wieder?  
72 L Die Schulden.  
73 E Neuverschuldung.  
74 L Genau.  
75 E Also die Schulden, die hinzukommen. Eigentlich ja.  
76 I Mhm. Laura hat gesagt, die Schulden sinken. Und du hast gesagt, die Neuverschuldung sinkt.  
77 E Also da steht ja die Neuverschuldung. Das heißt, es kommen keine neuen Schulden hinzu, das – eigentlich müsste es dann ja gleichbleiben. So.  
78 L Ja, wir sollen ja die, äh, ja da Schulden darstellen. Nicht die Neuverschuldung.  
79 E Ah ja, stimmt.  
80 I Und was habt ihr beide dargestellt?  
81 L Die .. Verschuldung. Also die Schulden, dass die hier ansteigen und dann – Achso, weil das ist ja die Neuverschuldung aus dem Zeitungsartikel.  
82 E Also eigentlich müsste das ja gleichbleiben, weil ja keine neuen Schulden dazukommen. Nicht?  
83 E/L [*lachen*]  
84 L Also wenn die Neuverschuldung ansteigt, heißt das dann nicht eigentlich auch, dass die Schulden ansteigen müssen?  
85 E Ja. Also es kommen ja neue Schulden dazu.  
86 L Und dann .. ist die Neuverschuldung gesunken, das heißt [*„unverständlich*]  
87 E das heißt vielleicht, es kommen weniger neu neue Schulden dazu?  
88 L Dass wir das vielleicht nicht ganz so stark ... [*zeigt auf ihren Graphen*]  
89 E Ja.  
90 L abdingsen? [*macht eine absinkende Handbewegung*]

Ela zeigt in Turn 75 sprachliche Ressourcen, die ihr das Auffalten des Neuverschuldungsbegriffs in seine Bedeutung ermöglichen („die Schulden, die hinzukommen“) und den Ausgangspunkt für ihren Konzeptaufbau bilden: in Turn 77 versucht sie einen ersten Zusammenhang zwischen Neuverschuldung und Schulden zu formulieren. Auch wenn Ela die Ebenen noch nicht tragfähig verknüpft, nimmt sie erstmals Bestands- und Änderungsfunktion gleichzeitig in den Blick. Dabei geht sie zunächst davon aus, dass ein Abnehmen der Neuverschuldung bedeutet, dass die Schulden konstant bleiben („eigentlich müsste es dann ja gleich bleiben“). Diese konzeptuelle Hürde wird in Turn 82 wiederholt. Bis Turn 87 erarbeitet Ela sich aber die (mathematisch tragfähige) Aussage „es kommen weniger neue Schulden dazu“, auch wenn sie den Zusammenhang zwischen den Ebenen noch nicht explizit benennt. Laura hingegen zeigt konzeptuelle als auch sprachliche Schwierigkeiten bei der Beschreibung der gegensinnigen Entwicklung der Schulden, die sich z.B. in ihrer Aussage „Neuverschuldung gesunken, das heißt, dass wir das vielleicht nicht ganz so stark abdingsen“ in Turn 88/90 bemerkbar machen. Beide verwenden in ihren Ausführungen bedeutungsbezogene geometrische Sprache, wobei Elas Sprachmittel ebenso kontextspezifische sein könnten. Der folgende Ausschnitt zeigt, dass es Ela schließlich gelingt, über

bedeutungsbezogene geometrische Darstellungen und entsprechende Sprachmittel die Bedeutungen der Begriffe Schulden und Neuverschuldung zu erläutern und somit eine tragfähige Brücke zum inhaltlichen Kern der gegensinnigen Kovariation zu schlagen:

- 108 I Was passiert da jetzt 2014? Was wollt ihr da darstellen in der Grafik?  
111 E Ja, oder .. Äh, wenn die Neuverschuldung gesunken ist, das heißt, es gibt nicht so viele neue Schulden. Muss das dann nicht eigentlich nur weniger steil hochgehen? Weil es sind ja .. trotzdem noch, da steht ja, das ist gesunken, nicht dass es gar keine neuen Schulden sind.

### Zwischenfazit

Die ersten Analysen zeigen die Potentiale, die bedeutungsbezogene geometrische Darstellungsebene als Ausgangspunkt für einen verständigen Konzeptaufbau in der Differentialrechnung zu nutzen. Wie die Transkriptausschnitte zeigen, sind eigensprachliche Ressourcen in Form von geometrischer Sprache bereits stark ausgeprägt und als Anknüpfungspunkt verfügbar. Dagegen sind Ressourcen der Kontextsprache zwar zuweilen aktivierbar, jedoch meist noch wenig mit dem mathematischen Inhalt verknüpft. Die noch andauernden Analysen und nächsten Designexperimente konzentrieren sich daher auf die tiefere Vernetzung des konzeptuellen und sprachlichen Lernpfades mit Hilfe der geometrischen bedeutungsbezogenen Sprache als zentrale Denkstütze.

### Literatur

- Gibbons, P. (2002). *Scaffolding Language, Scaffolding Learning*. Portsmouth: Heinemann.
- Leisen, J. (2005). Wechsel der Darstellungsformen. Ein Unterrichtsprinzip für alle Fächer. *Der Fremdsprachliche Unterricht Englisch*, 78, 9-11.
- Hahn, S. (2008): Bestand und Änderung – Grundlegung einer vorstellungsorientierten Differentialrechnung. *Beiträge zur Did. Rekonstruktion*, Bd. 21, Oldenburg: DIZ.
- Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Thiele, J. & Ralle, B. (2012). Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen - Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. *MNU* 65(8), 452–457.
- Pöhler, B. & Prediger, S. (2015). Intertwining lexical and conceptual learning trajectories - A design research study on dual macro-scaffolding towards percentages. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11(6), 1697-1722.
- vom Hofe, R. (2013). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 13(4), 345-364.
- Wessel, L. (2015). *Fach- und sprachintegrierte Förderung durch Darstellungsvernetzung und Scaffolding*. Heidelberg: Springer.