Adrian SCHLOTTERER, Universität Augsburg, DE

Ausgewählte (real-)schulrelevante Themen aus der Analysis und Geometrie unter Beleuchtung eines „höheren“ universitären Standpunkts

Seit mehr als 100 Jahren beschäftigt uns nun die Klein´sche These zur doppelten Diskontinuität in der Lehramtsausbildung. Unter anderem stellt Klein das Postulat auf, dass die Studierenden kaum selbständig Zusammenhänge zwischen schulischer und universitärer Mathematik herstellen können. Das Angebot einer in Augsburg neu konzipierten Lehrveranstaltung soll diesbezüglich Abhilfe schaffen, indem anhand ausgewählter realschulrelevanter Themenbereiche aus verschiedenen Teildisziplinen der Mathematik Brückenschläge explizit sichtbar gemacht werden.

Die Diskrepanz zwischen Schulcurriculum und Hochschulmathematik zu verringern und die damit zu erwartende Sinnstiftung bei den Studierenden, war Motivation bei der Konzeption dieser fachlich bedarfsgerechten, schnittstellenspezifischen Lehrveranstaltung für Realschulstudierende.

Mehrere Leitfragen bestimmten im Vorfeld den Diskurs der an der Planung beteiligten Dozenten:

1. Wie können die erlebten Bruchstellen an den Übergängen Schule-Hochschule verringert werden, d.h. (wie) kann Sinnstiftung bei den Lehramtsstudierenden in der universitären Lehre stattfinden?
2. Welche Konzeption bzw. welche Eigenschaften braucht eine fachliche Lehrveranstaltung, dass Studierende Verbindungen zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik erkennen?
3. Gibt es bestimmte Themen, die die Studierenden besonders beeindrucken („Klick-Momente“ des Bilder-change, also Veränderung der Einstellungen zur Mathematik)?

1. Ziele der Lehrveranstaltung

Die fachliche Lehrveranstaltung hat den Anspruch zur Verbesserung der fachwissenschaftlichen Lehramtsausbildung beizutragen. Dahingehend wurden drei Hauptziele abgesteckt:

Das Erspüren des Wesens der Mathematik, d.h. „learning to think mathematically“ (Schoenfeld, 1992) soll in den Mittelpunkt gerückt werden. Mathematik wird in dieser Lehrveranstaltung also weniger als produkt-orientierte, vielmehr als prozessorientierte, genetische Wissenschaft verstanden.

Der Aufbau fachlichen Wissens wird durch Sinngenerierung mittels Antizipation kritischer Momente von Lehr-Lernsituationen gefördert: „Wieso ist

0,999… = 1?“ (vgl. COACIV-Studie; Dieser et al., 2012). Was steckt mathematisch hinter dieser Fragestellung? Stimmt das immer? Der fachliche Inhalt wird zugleich mit der Anwendungssituation kontextuiert, indem ein expliziter Schulbezug hergestellt wird: „Wie würden Sie auf eine solche Schülerfrage in der 8. Jahrgangsstufe reagieren?“ So wird aktiv der Ausbildung trägen Wissens vorgebeugt und der spätere Transfer des fachlichen Wissens in das Klassenzimmer kann gelingen. Feinziel ist hier das spontane, fachlich präzise Reagieren auf mögliche SuS-Fragen, also die Förderung der Erklärkompetenz.

Letztlich soll die Verbesserung der fachlichen Ausbildung vor allem durch explizite Brückenschläge und Schnittstellenerfahrungen erreicht werden (vgl. Bauer, 2009). Die Realschulstudierenden sollen die Verbindung von schulbezogenem und unispezifischem Fachwissen erkennen und so neben der Sinnerfahrung tieferes fachliches Wissen generieren.

Im Rahmen der Lehrveranstaltungskonzeption wurden Hochschullehrende und praktizierende Lehrkräfte interviewt, welche Themen(-gebiete) der Hochschulmathematik in der Realschule eine Rolle spielen, ggf. *ohne* dass sich die Lehrperson dessen bewusst ist.

2. Exemplarische Inhalte

Aus dem Antwortpool wurden interessante Inhalte gebündelt.

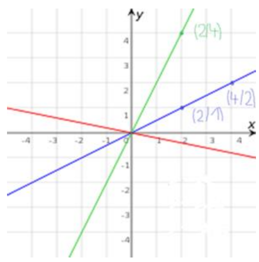
2.1. Äquivalenzklassenmodell bei ganzen und rationalen Zahlen

Lehr- und Lernziele:

- Konstruktion neuer Zahlen durch Äquivalenzklassen
- Zahlbereichserweiterungen fachlich korrekt verstehen
- Analogie der beiden Zahlbereichserweiterungen $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ begreifen

Beispielaufgabe:

Erklären Sie, was nebenstehende Skizze mit Äquivalenzklassen und Brüchen zu tun hat.



Hier stand eine für die Mathematik typische Denk- und Arbeitsweise im Mittelpunkt – Unbekanntes wird auf Bekanntes zurückgeführt, explizit die ganzen auf die natürlichen Zahlen. Außerdem wird die komplexe Äquivalenzklassenbildung in den Schulkontext eingebettet und somit der Zusammenhang zwischen Schulcurriculum und Hochschulmathematik deutlich hergestellt.

2.2. Flächeninhalt eines Dreiecks

Verschiedene Flächeninhaltsformeln für ein Dreieck wurden mit den Kongruenzsätzen vernetzt:
Der SWS-Satz mit der dazugehörigen Flächeninhaltsformel
$A = \frac{1}{2} x_1 \cdot x_2 \cdot sin$ (eingeschlossener Winkel).
Nun stellt sich die Frage, ob es für den SSS-Satz etwas Vergleichbares gibt: Hier kann die Heron-Formel gefunden werden:
$A = \sqrt{s(s - x_1)(s - x_2)(s - x_3)}$ mit $s = \frac{1}{2} u = \frac{1}{2} (x_1 + x_2 + x_3)$
Als Ausblick wird das isoperimetrische Problem, welches Dreieck mit gegebenem *u* den größten Flächeninhalt habe, behandelt.

3. Erste Effekte

In einem Prä-/Posttest-Design wurden 12 Einstellungs- und 7 Leistungsitems abgefragt, um einen ersten Eindruck zu gewinnen ($N = 13$). Die Einstellungsitems wurden über eine Likert-Skala getestet. Besonders interessant bei der Reflexion der Lehrveranstaltung war, dass das Äquivalenzklassensystem und der Goldene Schnitt von den Studierenden als Inhalte mit geringem Schulbezug bewertet wurden. Es scheint den Studierenden also auch selbst mit dem neuen Lehrveranstaltungsangebot noch nicht ausreichend zu gelingen, den Zusammenhang herzustellen und beispielsweise das Konzept der Äquivalenzklassenbildung bei der Konstruktion neuer Zahlbereiche als schulrelevant zu begreifen. Dieser Aspekt soll im kommenden Sommersemester 2017 genauer untersucht werden.

Die größte absolute Veränderung mit einer Effektstärke von $d = -0.71$ konnte bei einem Einstellungsitem (angelehnt an Weygandt, 2014) beobachtet werden: „Beim Lernen von Mathematik sind nicht-zielführende Wege hinderlich.“ Nach der Lehrveranstaltung haben die Studierenden nicht-zielführende Wege also als weniger hinderlich beim mathematischen Lernprozess wahrgenommen als noch vor der Veranstaltung. An dieser Stelle wird nochmals ausdrücklich auf den geringen Datensatz hingewiesen; zudem fehlte eine Kontrollgruppe. Somit kann das Ergebnis lediglich als kleine Tendenz interpretiert werden.

4. Diskussion

Die Wirksamkeit einer solchen Lehrveranstaltung kann aufgrund der geringen Teilnehmerzahl nur schwer wissenschaftlich überprüft werden. Weiterhin können beobachtbare Effekte durch eine andere Veranstaltung erzielt oder aber durch die Abhängigkeit vom Dozenten verzerrt worden sein. Im kommenden Sommersemester 2017 werden die Vorstellungen von Realschulstudierenden zu ausgewählten schnittstellenspezifischen mathematischen Begriffen und Themenbereichen genauer analysiert. Forschungsfragen, die sich hierbei ergeben:

1. Wie reichhaltig sind mathematische Begriffe wie „Äquivalenzklasse“ und „Grenzwert(-prozesse)“ bei den Studierenden verankert bzw. vernetzt?
2. Welche Vorstellungen haben Realschulstudierende zu Vernetzungs-aspekten zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik?
3. Können die Studierenden nach der Veranstaltung selbständig Verbindungen zwischen dem Schulcurriculum und der Hochschul-mathematik herstellen?
4. Ist eine Veränderung bezüglich Einstellungen und mathematischer Denk- und Arbeitsweisen bei den Studierenden beobachtbar (Momente des „Bilder-change“)?

Literatur

Bauer, T., Partheil, U. (2009). Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik. *Mathematische Semesterberichte, 56*, 85–103.

Dieser, O., Heinze, A., Reiss, K. (2012): Elementarmathematik vom höheren Standpunkt: Warum ist 0,999…= 1? In W. Blum et al. (Hrsg.), *Mathematikunterricht im Kontext von Realität, Kultur und Lehrerprofessionalität.* (S. 249–264). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hefendehl-Hebeker, L. (2013): Doppelte Diskontinuität oder die Chance der Brückenschläge. In C. Ableitinger et al. (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung. Ansätze zur Verknüpfung der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen.* (S. 1–15). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Klein, F. (1924): Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Bd. 1: Arithmetik, Algebra, Analysis. 3. Auflage. Berlin: Springer.

Krauss et al. (2011). Konzeptualisierung und Testkonstruktion zum fachbezogenen Professionswissen von Mathematiklehrkräften. In M. Kunter et al. (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 135–161). Münster: Waxmann.

Schoenfeld, A. (1992): Learning to think mathematically: Problem solving, Metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Hrsg.), *Handbook für Research on Mathematics Teaching and Learning.* (S. 334–370). New York: Macmillan.

Weygandt, B., Oldenburg, R. (2014): Weltbilder von Lehramtsstudierenden zur genetischen Sicht von Mathematik. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 1307–1310. Münster: WTM.