Christian SCHÖTTLER, Universität Paderborn, DE

DeziMal – Dezimales Verständnis von Lernenden beim inklusiven Mathematiklernen in den Klassen 5 & 6

Das dezimale Stellenwertsystem zählt zu den fundamentalen Ideen der Mathematik (z.B. Wittmann 1995) und damit zu einem wesentlichen Inhalt des Mathematikunterrichts. Gleichzeitig stellt das Verständnis des Dezimalsystems eine kritische Stelle im Lernprozess dar (Häsel-Weide 2017), welche als unverzichtbare Verstehensgrundlage von allen Schülerinnen und Schülern verstanden werden muss. Gelingt keine Einsicht in das Dezimalsystem, wird ein sicherer Umgang mit Zahlen erschwert, was zu Schwierigkeiten beim Rechnen mit großen Zahlen, flexiblen Rechnen und Verständnis von Dezimalbrüchen führen sowie die mathematische Lernentwicklung negativ beeinflussen kann. Zu einem Verständnis des Dezimalsystems gehört in Anlehnung an Treffers (2001) ein strukturorientiertes und ein positionsorientiertes Verständnis. Grundlage des strukturorientierten Verständnisses sind das Bündelungs- und Stellenwertprinzip. Beim positionsorientierten Verständnis soll die Vorstellung aufgebaut werden, dass alle Zahlen eine geordnete Reihe bilden, in der jede Zahl eine feste Position einnimmt. Diese Prinzipien gelten sowohl im Bereich der natürlichen Zahlen als auch bei den Dezimalbrüchen. Aufgrund des analogen Aufbaus des Dezimalsystems wird zunächst ein Verständnis des Dezimalsystems in kleineren Zahlenräumen aufgebaut und anschließend sukzessive auf größere Zahlenräume sowie auf Dezimalbrüche erweitert. Daher ist das dezimale Stellenwertsystem besonders zur Behandlung im inklusiven Mathematikunterricht geeignet, weil die Lernenden die wesentlichen Prinzipien an der gleichen mathematischen Idee in unterschiedlichen Zahlenräumen bzw. Zahlbereichen bearbeiten können.

Design der Studie

Im Promotionsprojekt „DeziMal“ werden gemäß einer Mathematikdidaktik als Design Science (Nührenbörger et al. 2016) für den inklusiven Mathematikunterricht Lernumgebungen entwickelt und erforscht, mit denen ein dezimales Verstehen bei Lernenden im sechsten Schuljahr gefördert werden kann. Die konzipierten Lernumgebungen wurden von dem Autor im regulären Mathematikunterricht verschiedener Gesamtschulen erprobt und anschließend modifiziert, ohne im engeren Sinne einen iterativen Zyklus zu durchlaufen. Der Unterricht wurde videografiert. Dabei wurden während der Arbeitsphasen jeweils zwei bis drei Schülerpaare gefilmt, davon jeweils ein Lernender mit sonderpädagogischem Förderbedarf im Bereich Lernen.

Im Mittelpunkt des rekonstruktiven Forschungsinteresses stehen folgende zwei Fragestellungen:

- Welches mathematische Verständnis zeigen und entwickeln die Schülerinnen und Schüler bezüglich des Aufbaus und der Struktur des Dezimalsystems?
- Welche Interaktions- und Deutungsprozesse sind während der Partnerarbeit in einem inklusiven Setting zu beobachten und inwiefern sind diese produktiv?

Die Fragestellungen werden durch eine systematisch-extensionale Interpretation im Sinne der interpretativen Unterrichtsforschung bearbeitet. Dabei wird das dezimale Verständnis in Anlehnung an das Instrument „epistemologisches Dreieck“ (Steinbring 2005) analysiert. Eine differenzierte Beschreibung und Erfassung der Verantwortungsübernahme und aktive Beteiligung in der gemeinsamen Bedeutungsaushandlung erfolgt in Anlehnung an die „Partizipationsanalyse“ (Krummheuer & Brandt 2001).

Dezimales Verstehen fördern in der Lernumgebung „Zoomen auf dem Zahlenstrahl“

Ziel der Lernumgebung ist, dass die Schülerinnen und Schüler dekadische Analogien erkennen, um ihr Verständnis des Dezimalsystems zu vertiefen. Dazu werden im Sinne des positionsorientierten Verständnisses mithilfe der „Zoom-Funktion“ am teilweise beschrifteten Zahlenstrahl die dekadischen Beziehungen zwischen unterschiedlichen Zahlenräumen bzw. Zahlbereichen und den Stufenzahlen sowie im Bereich der Dezimalbrüche das Konzept der Dichtheit fokussiert. Dabei ist die Lernumgebung so gestaltet, dass durch den Einsatz struktur-analoger Aufgaben in den ersten beiden Teilen die strukturellen Zusammenhänge zwischen HT ZT T und H Z E und im dritten Teil die Beziehungen zwischen natürlichen Zahlen und Dezimalbrüchen thematisiert werden (vgl. Abb. 1). Dadurch ist es möglich, dass die Schülerinnen und Schüler zwar in unterschiedlichen Zahlenräumen bzw. Zahlbereichen, jedoch an einem gemeinsamen strukturellen Kern arbeiten und auch ein fachbezogener Austausch über ihre Erkenntnisse und Entdeckungen möglich ist.

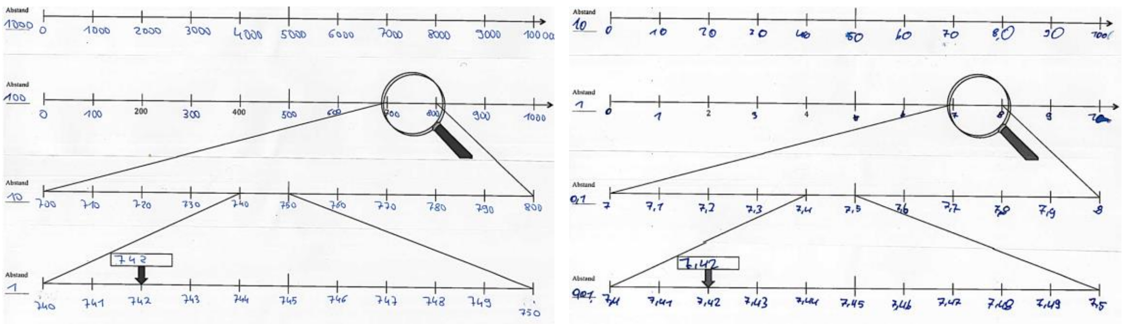

Abbildung 1: Dekadische Beziehungen zwischen natürlichen Zahlen und Dezimalbrüchen beim Zoomen am Zahlenstrahl

In der Arbeitsphase des dritten Teils erhalten die Schülerinnen und Schüler jeweils eine der beiden Zahlenstrahlfolgen. Aufgabe ist, zunächst individuell (koexistente Lernsituation) die jeweiligen Zahlenstrahlen zu beschriften und eine gesuchte Zahl exakt am Zahlenstrahl zu positionieren. Dazu müssen in den unterschiedlichen Zahlbereichen jeweils Ausschnitte verfeinert und die entsprechenden Abstände bestimmt werden.

Im Anschluss an die Einzelarbeit vergleichen die Schülerinnen und Schüler ihre Zahlenstrahlfolgen, notieren Gemeinsamkeiten sowie Unterschiede zwischen den Zahlenstrahlfolgen und können gleiche und unterschiedliche Beziehungen zwischen den Zahlenstrahlen entdecken. Beispielsweise können sie bei einem vertikalen Vergleich erkennen, dass bei den Zahlenstrahlfolgen jeweils um den Faktor 10 verfeinert wurde. Bei einem horizontalen Vergleich fällt auf, dass sich die Beschriftungen und die Stufenzahlen um den Faktor 100 unterscheiden, es sich also jeweils um verschiedene Zahlen handelt, die jedoch aus den gleichen Ziffern bestehen. Zudem werden auf beiden Zahlenstrahlfolgen die gleichen Ausschnitte verfeinert.

Die gemeinsame Tätigkeit besteht hier in einem Vergleich analoger Aufgaben. Damit diese Phase erfolgreich ist, müssen beide Lernenden ihre Ergebnisse aus der vorhergehenden Phase einbringen, sie sind also voneinander abhängig (solidarische Lernsituation).

1.	Akim	**Und bei sieben und acht habe ich jetzt gezoomt und dann habe ich sieben** (*zeigt auf die linke Grenze des zweituntersten Zahlenstrahls*) **und acht** (*zeigt auf die rechte Grenze des zweituntersten Zahlenstrahls*)**. Also kamen bei mir Dezimalzahlen raus. Also sieben-Komma-eins, sieben-Komma-zwei** (*zeigt nacheinander auf die Skalierungsstriche des zweituntersten Zahlenstrahls*). **Und ganz oben mussten wir Zehner machen. Die Abstände von ganz unten waren null-Komma-null-eins, null-Komma-eins und eins. Dann mussten wir und danach Zehn.**
2.	Ina	**Also, eigentlich waren genau die gleichen Zahlen, nur, dass mehrere Zehner waren.**
3.	Akim	**Ja. Bei dir waren zwei Nullen und bei mir waren keine Nullen.**
4.	Ina	**Und dadurch, dass mehrere Zehner waren, also höhere Zahlen als bei ihm, kamen am Ende auch andere Zahlen raus. Weil es immer kleiner gemacht wurde. Das ist unser Ergebnis.**

Abbildung 2: Transkriptausschnitt aus der Vergleichsphase

In dem Transkriptausschnitt vergleichen die beiden Lernenden Akim und Ina ihre Zahlenstrahlfolgen. Dazu beschreibt Akim zunächst, zwischen welchen Zahlen er den Zahlenstrahlausschnitt verfeinert hat und nennt die Abstände seiner Zahlenstrahlen. Durch ein „Verfeinern“ zwischen zwei benachbarten natürlichen Zahlen gelangt er in den Bereich der Dezimalbrüche. Wenn Inas Äußerung als eine direkte Reaktion auf Akim gedeutet wird, erkennt sie vermutlich, dass beide zwischen dem siebten und achten Skalierungsstrich verfeinert haben und daher „eigentlich [...] die gleichen Zahlen“ haben. Dabei fällt Ina wahrscheinlich auch auf, dass sich die Abstände zwischen Akims und ihrem Zahlenstrahl unterscheiden, was sie mit ihrer Aussage „mehrere Zehner“ zum Ausdruck bringt. Akim greift diese Äußerung auf und präzisiert sie, bleibt aber auf einer empirisch-konkreten Ebene. Die Aussagen von Ina „mehrere Zehner, also höhere Zahlen“ zeigt das Bemühen, die dekadische Struktur zu verbalisieren. Ebenso versprachlicht sie die in beiden Zahlenstrahlfolgen übereinstimmende Struktur der Verfeinerung als „immer kleiner gemacht“. Die Interaktion der Lernenden weist darauf hin, dass sie durch den Vergleich strukturelle Beziehungen erkennen, zeigt aber auch die Schwierigkeit, die Strukturen des Dezimalsystems begrifflich zu fassen.

Beide Lernende beteiligen sich ungeachtet ihrer unterschiedlichen Lernausgangslagen an der Bedeutungsaushandlung und bringen eigene, aufgabenorientierte Beiträge ein. Sie beziehen sich in ihren Äußerungen aufeinander und kommen zu einem gemeinsamen Ergebnis.

In weiteren Analysen sollen die genauen Erkenntnisprozesse in Bezug auf das dezimale Verstehen rekonstruiert werden. Dabei sollen insbesondere die Prozesse der Bedeutungsaushandlung daraufhin untersucht werden, welche Ideen die Lernenden in die Bedeutungsaushandlung einbringen und welche Funktionen ihre Beiträge im gemeinsamen Interaktionsprozess haben.

Literatur

Häsel-Weide, U. (2017). Inklusiven Mathematikunterricht gestalten. Anforderungen an die Lehrerausbildung. In J. Leuders, M., Leuders, S. Ruwisch & S. Prediger (Eds.), *Mit Heterogenität im Mathematikunterricht umgehen lernen – Konzepte und Perspektiven für eine zentrale Anforderung an die Lehrerbildung*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Krummheuer, G. & Brandt, B. (2001). *Paraphrase und Traduktion. Partizipationstheoretische Elemente einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens in der Grundschule*. Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Nührenbörger, M., Rösken-Winter, B., Fung, C., Schwarzkopf, R., Wittmann, E. C., Akinwunmi, K., Lensing, F. & Schacht, F. (2016). Design Science and Its Importance in the German Mathematics Educational Discussion, *ICME-13 Topical Surveys*.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction – An Epistemological Perspective*. Berlin: Springer.

Treffers, A. (2001). Numbers and numbers relationsships. In: M. van den Heuvel-Panhuizen (Eds.). *Children Learn Mathematics: A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for Calculation with whole Numbers in Primary School* (S. 101 – 120). Utrecht: Freundenthal Institute.

Wittmann, E. C. (1995). Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Arithmetikunterricht. In G. N. Müller & E. C. Wittmann (Eds.), *Mit Kindern rechnen (S. 10-41).* Frankfurt a. M.: Arbeitskreis Grundschule.