Jan SCHUMACHER, Universität Paderborn, DE

Sinnkonstruktion beim Erkunden von Mustern und Strukturen

Für Begriffsbildungsprozesse wird das Herausbilden von Grundvorstellungen als zentral angesehen. Dies lässt sich jedoch vornehmlich in Zusammenhängen realisieren, in denen mathematische Konzepte in realen Sach- oder Handlungszusammenhängen eingeführt werden. Gerade in der Grundschule, zunehmend aber auch in der Sekundarstufe, stellt das Erkunden mathematischer Muster und Strukturen einen zentralen Ansatz zum Lernen mathematischer Zusammenhänge dar. Doch wie lässt sich die Sinnkonstruktion beim Erkunden von Mustern und Strukturen erklären? Zur Klärung dieser Fragestellung soll in diesem Beitrag ausgehend von Peirces Zeichenbegriff und Wittgensteins Zeichenspiel eine theoretische Möglichkeit aufgezeigt werden, wie Sinnkonstruktion beim Erkunden von Mustern und Strukturen konzeptualisiert werden kann. Als Grundlage für die theoretischen Überlegungen der Sinnkonstruktion dient eine Lernumgebung zu negativen Zahlen, bei der die negativen Zahlen und die Operationen mit den ganzen Zahlen rein innermathematisch eingeführt werden (vgl. Schumacher 2016).

Peirces Zeichenbegriff

Für Peirce besitzt ein Zeichen eine triadische Struktur bestehend aus Repräsentamen, Interpretant und Objekt. Er beschreibt die Beziehung wie folgt: „A sign, or *representamen*, is something which stands to somebody for something in some respect or capacity. It addresses somebody, that is, creates in in the mind of that person an equivalent sign, or perhaps a more developed sign. That sign which it creates I call the *interpretant* of the first sign. The sign stands for something, its *object*. It stands for the object, not in all respects, but in reference to a sort of idea, which I have sometimes called the *ground* of the representamen" (CP, 2.228). Diese triadische Zeichenrelation ist in einen Zeichenprozess eingebunden. Ein Zeichen ist nur ein Zeichen, wenn es „einen Interpretanten hat, der selbst wiederum interpretiert wird" (Hoffmann 2001). Dies führt zu Zeichenketten („chains"), die nicht von sich aus aufhören, sondern nur abgebrochen werden können und auf die im weiteren Verlauf eingegangen wird.

Die Frage nach der Relevanz triadischer Zeichenrelationen für die Mathematik lässt sich folgendermaßen beantworten: Mathematische Objekte sind abstrakte Objekte, die durch ihre Zeichen (Repräsentamen) bezeichnet werden und die durch die Repräsentamen Interpretanten erzeugen. Ein Beispiel wäre die Subtraktion zweier natürlicher Zahlen.

Das Objekt – die Subtraktion – ist etwas Abstraktes, was durch verschiedene Repräsentamen dargestellt werden kann, z.B. symbolisch durch die Aufgabe 5 – 3. Bei einem Schüler führt dieses Repräsentamen zu dem Interpretanten, bei dem die Aufgabe an der Zahlengeraden vorgestellt wird.

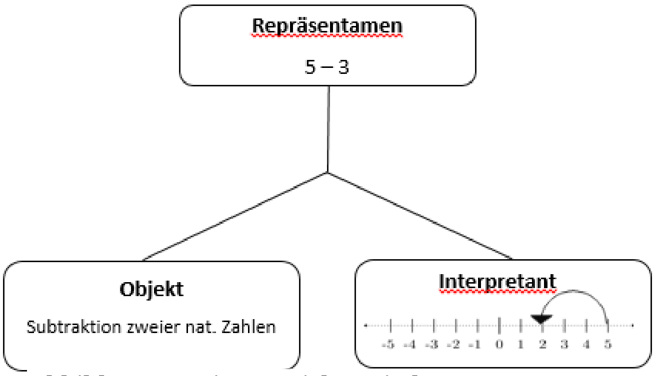

Abbildung 1: Peirces Zeichentriade

Bringt man diesen semiotischen Ansatz mit der Idee des Spieleformalismus in Verbindung, kann man Mathematik als ein Spiel mit Zeichen beschreiben.

Mathematik als Zeichenspiel

So nennt etwa Wittgenstein (1984, S. 265) die Mathematik „ein Zeichenspiel nach Regeln". Bei dieser Betrachtung der Mathematik stehen die Regeln im Vordergrund und mit den Zeichen operiert man „nun wie [mit] Figuren in einem Spiel, mit denen nach den vereinbarten Spielregeln gehandelt wird" (Dörfler 2013). Der Schluss, dass die Mathematik ein Spiel ist, darf dabei nach Wittgenstein jedoch nicht gezogen werden. Vielmehr lassen sich nur die charakteristischen Züge mathematischer Tätigkeiten untersuchen, was Wittgenstein durch Analogien zum Schachspiel versucht zu verdeutlichen: Die Bedeutung der Figuren im Schachspiel wird durch das Spiel festgelegt, ebenso wie die Bedeutung mathematischer Zeichen durch die Praxis des mathematischen Zeichenspiels – das mathematische Kalkül – festgelegt wird. Und genauso, wie das Schachspiel nicht von den Schachfiguren handelt, handelt die Mathematik nicht von den genutzten Zeichen, sondern von dem Handeln mit diesen. Bezogen auf die Beispielaufgabe bedeutet das: Die Mathematik handelt nicht von den Zeichen 5, – und 3, sondern von dem Handeln bzw. Operieren damit. Die genutzten Zeichen spielen dabei in der Mathematik unterschiedliche Rollen, die sich von Kontext zu Kontext ändern können, so dass die Referenz des Zeichens sich nur in der Verwendung zeigt. Ein Beispiel ist das Minuszeichen, das je nach Kontext als Operationszeichen, Vorzeichen oder Zeichen für die Gegenzahl genutzt wird. Beim Erlernen des Operierens mit den Zeichen muss somit eine Sinnkonstruktion erfolgen, damit die Zeichen in unterschiedlichen Kontexten richtig verwendet werden.

Sinnkonstruktion beim Erkunden von Mustern und Strukturen

Sinnkonstruktion kann auf unterschiedliche Art und Weise erfolgen. Ein gängiger Weg ist es, Grundvorstellungen aufbauen zu wollen. Unterscheiden lassen sich Grundvorstellungen in primäre, die auf gegenständlichen Handlungserfahrungen aufbauen, und sekundäre Grundvorstellungen, für die „nicht mehr reale, sondern vorgestellte Handlungen an mathematischen Darstellungsmitteln“ charakteristisch sind (vom Hofe 2014). Der Begriff Grundvorstellung umfasst dabei die drei Aspekte Sinnkonstituierung eines Begriffs, Aufbau entsprechender (visueller) Repräsentationen bzw. ‚Verinnerlichungen‘ und Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit. Dabei geschieht die „*Sinnkonstituierung eines Begriffs* durch Anknüpfen an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge bzw. Handlungsvorstellungen“ (vom Hofe & Blum 2016). Dieser Bezug zu außer- oder innermathematischen Handlungsvorstellungen ist bei Muster-und-Struktur-Erkundungen nicht gegeben, da die Erkundungen, die in der eingangs erwähnten Lernumgebung gemacht werden, auf rein symbolischer Ebene stattfinden und damit keine Handlungsvorstellungen verknüpft werden können. Stattdessen geht es bei den Erkundungen vielmehr darum, dass die Lernenden die Strukturen und Regeln, die den Mustern zugrunde liegen, erkennen und für sich als sinnvoll erachten. Eine Möglichkeit, wie sinnvoll und damit auch Sinn verstanden werden kann, soll in Anlehnung an Wittgenstein (PU, 421), der dieses für Sprache formuliert hat aufgezeigt werden. Wittgenstein sagt, dass ein Wort eine Bedeutung hat, die sich erst im Gebrauch des Wortes zeigt. Der Satz hingegen ist ein Instrument und sein Sinn ist seine Verwendung. Dies kann man folgendermaßen auf die Mathematik übertragen: Ein mathematisches Zeichen hat eine Bedeutung, die sich allerdings erst im Gebrauch zeigt und der Sinn eines mathematischen Ausdrucks ist seine Verwendung (im Zeichenspiel). Sinnkonstruktion bedeutet bei diesem Sinnkonzept zu lernen, wie man einen mathematischen Ausdruck im Zeichenspiel verwendet. Dieses Verständnis wird durch vielfältige Aktivitäten mit den Zeichen und Ausdrücken aufgebaut und bedarf einer aktiven Teilnahme am Zeichenspiel (Dörfler 2013).

Am Beispiel der Addition einer positiven mit einer negativen Zahl soll nun kurz erläutert werden, wie in der Lernumgebung die Sinnkonstruktion bei den Lernenden angelegt wird. Das schöne Päckchen in Abbildung 2, bei dem die Lernenden zum ersten Mal eine negative Zahl addieren müssen, bietet die Möglichkeit, die dem Päckchen zugrundeliegende Struktur im bekannten Zahlbereich zu entdecken. Haben

a) $3 + 3 =$ ____
$3 + 2 =$ ____
$3 + 1 =$ ____
$3 + 0 =$ ____
$3 + (-1) =$ ____
$3 + (-2) =$ ____

Abbildung 2: Einstieg in die Addition ganzer Zahlen

die Lernenden die Struktur entdeckt, so können sie die Ergebnisse der „neuen" Aufgaben ebenfalls bestimmen. Obwohl es also keine Anleitung gibt, wie die Aufgaben zu bearbeiten sind, können die Lernenden an dem Zeichenspiel teilhaben und dadurch lernen, wie sie Ausdrücke – in diesem Fall eine positive Zahl plus eine negative Zahl – im mathematischen Zeichenspiel schlüssig verwendet werden können. Im weiteren Verlauf der Lernumgebung entdecken die Lernenden, dass sie, anstatt eine negative Zahl zu addieren, die Gegenzahl subtrahieren können. Sie lernen somit eine Regel des Zeichenspiels, um an diesem weiter teilnehmen zu können.

Fazit und Ausblick

In diesem Beitrag wurde ein theoretisches Konzept zur Sinnkonstruktion beim Erkunden von Mustern und Strukturen und die Umsetzung davon in einer Lernumgebung zu negativen Zahlen vorgestellt. Im weiteren Verlauf muss nun praktisch untersucht werden, wie die Sinnkonstruktion in der entwickelten Lernumgebung tatsächlich erfolgt. Eine Möglichkeit dazu könnte eine Analyse der Sinnkonstruktionsprozesse aus einer semiotischen Perspektive mithilfe der semiotischen Prozesskarten von Schreiber (2010) sein.

Literaturverzeichnis

Dörfler, Willi (2013): Bedeutung und das Operieren mit Zeichen. In Michael Meyer, Eva Müller-Hill und Ingo Witzke (Hg.): *Wissenschaftlichkeit und Theorieentwicklung in der Mathematikdidaktik. Festschrift anlässlich des sechzigsten Geburtstages von Horst Struve.* Hildesheim: Franzbecker, S. 165–182.

Hoffmann, Michael H.G. (2001): *Peirces Zeichenbegriff: seine Funktionen, seine phänomenologische Grundlegung und seine Differenzierun*g. Bielefeld.

Peirce, Charles S. (CP): Collected papers of Charles Sanders Peirce.

Schreiber, Christof (2010): *Semiotische Prozess-Karten. Chatbasierte Inskriptionen in mathematischen Problemlöseprozessen.* Münster: Waxmann.

Schumacher, Jan (2016): Erkunden mathematischer Strukturen anstatt Interpretation in Modellen – Ein innermathematischer Zugang zu negativen Zahlen. In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016*.

Vom Hofe, Rudolf (2014): Primäre und sekundäre Grundvorstellungen. In Jürgen Roth und Judith Ames (Hg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht* 2014, S. 1267–1270.

Vom Hofe, Rudolf; Blum, Werner (2016): "Grundvorstellungen" as a Category of Subject-Matter Didactics. In *Journal für Mathematik-Didaktik* 37 (1), S. 225–254.

Wittgenstein, Ludwig (PU): *Philosophische Untersuchungen.* 1. Aufl., [Nachdr.]. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Wittgenstein, Ludwig (1984): *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik.* 1. Aufl. Frankfurt am Main: Suhrkamp.