

Raumgeometrisches Entdecken

Das „Entdeckende Lernen“ ist eine viel Unterrichtszeit beanspruchende und anspruchsvolle, aber auch eine motivierende Unterrichtsmethode, die im Unterrichtsalltag allenfalls als Methode des gelenkten Entdeckens (guided-inquiry learning) vorkommt. Die Unterrichtsvorbereitung für die Wiederentdeckung mathematischer Erkenntnisse ist, um einen gewissen Lernerfolg zu sichern, sehr arbeitsaufwendig und erfordert von der Lehrkraft u. a. angemessene Sachkenntnisse faktischer und prozeduraler Art.

Standardwerk für das Entdeckende Lernen im deutschen Sprachraum ist, nach wie vor, Heinrich Winters „Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht“ (1989).

Raumgeometrisches Entdecken hat durch die Nutzung geeigneter Dynamischer Raumgeometrie-Systeme (DRGS), deren Prototyp Cabri 3D (Bainville & Laborde 2004-2015) ist, eine neue Qualität erfahren. Voraussetzung für eine solche Nutzung ist die Beherrschung eines DRGS, das bereits Begriffe der reellen euklidischen Raumgeometrie beinhaltet und diese im virtuellen Raum des Bildschirms entsprechend repräsentiert. Dabei wird das Entdecken raumgeometrischer Aussagen in DRGS durch die Visualisierung, die Konstruktion, die Messung und die direkte Manipulation, Variation und Erzeugung räumlicher Objekte medial unterstützt (Schumann 2007). Raumgeometrisches Entdecken mittels DRGS eröffnet weitergehende Erkenntnismöglichkeiten als sie mit herkömmlichen Medien gegeben sind. Folgende heuristische Methoden (u. a. Winter 1989), erfahren durch die Nutzung von DRGS eine Verstärkung beim raumgeometrischen Entdecken: die Analogiebildung, die Induktion, das Umstrukturieren und Variieren, das Generalisieren und Spezialisieren, die Analyse und Synthese, die Komposition und die Reversibilität.

Im Folgenden legen wir den Schwerpunkt auf das Entdecken in der räumlichen Formenkunde, da die schulgeometrische Formenlehre räumlicher Figuren geprägt ist durch einen bescheidenen Vorrat an Figuren als dienende Magd für Berechnungen. Ein reichhaltiges Entdeckungsfeld bieten die Polyeder, insbesondere jene konvexen Polyeder, deren Seitenflächen regelmäßige Polygone sind und die auch *Johnsonsche Körper* genannt werden. – Es fehlt noch eine Handlungsorientierung für unsere Entdeckungen: Welche „Handlungen“ an und mit diesen Polyedern sollen zu raumgeometrischen Entdeckungen führen? Wir haben folgende Auswahl an Aktivitäten getroffen, die das nachstehende Diagramm zeigt.

Der *Würfel* ist als einführender und beispielgebender Gegenstand für Schüler/Schülerinnen ab der oberen Sekundarstufe I und für Studierende des Lehramts Mathematik geeignet, außerhalb des Regelunterrichts bzw. modularen Regelstudiums z. B. in Form von Projektarbeit, eigene Entdeckungen zu machen. Dabei sind bestimmte Entdeckungsaktivitäten auch kombinierbar.

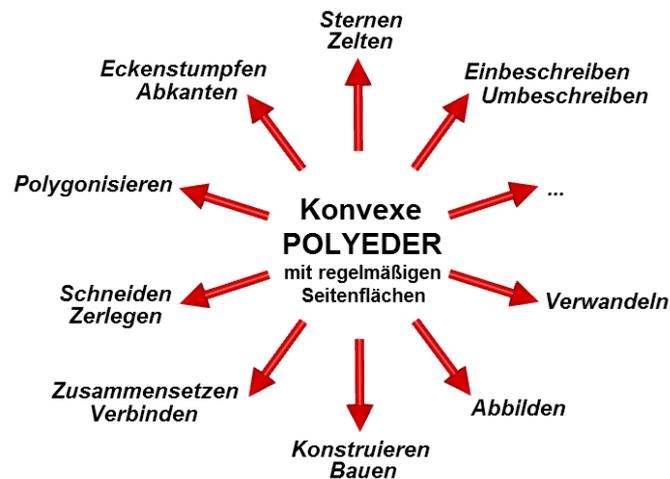


Diagramm „Raumgeometrisches Entdeckungsfeld“

Aus Platzgründen können im Folgenden nur einige der genannten Aktivitäten anhand von Impulsfragen und einzelner möglicher Entdeckungsergebnisse konkretisiert werden:

Ein- und Umbeschreiben

Finde Polyeder, die dem Würfel derart einbeschrieben sind, dass ihre Ecken auf der Würfeloberfläche liegen.

Teilergebnis: Dem Würfel kleinsten einbeschriebener Würfel (Abb. 1).

Finde Polyeder, die dem Würfel derart umbeschrieben sind, dass Würfel-ecken auf ihrer Oberfläche liegen.

Teilergebnis: Besondere umbeschriebene quadratische Pyramiden und Doppelpyramiden, deren Höhenvariation zu minimalem Volumen (zu minimaler Oberfläche bzw. Kantenlängensumme) führt (Abb. 2, umbeschriebene quadratische Pyramide mit minimalem Volumen).

Anmerkung: Dem Würfel einbeschriebene Körper sind zugleich von diesem umbeschriebene.

Zusammensetzen und Verbinden

Finde Polyeder, die aus Teilpolyedern des Würfels oder aus Würfeln zusammengesetzt werden können.

Teilergebnisse: Oktaederstumpf aus einer besonderen Würfelhälfte mittels Ebenenspiegelung (Abb. 3); Verbundpolyeder aus vier kongruenten Würfeln mit dem Rhombenkuboktaeder als Durchdringungskörper (Abb. 4).

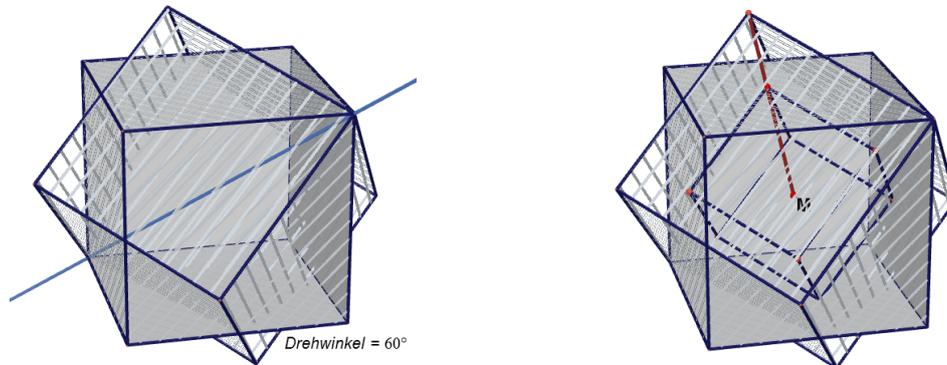


Abb. 1 Einbeschreibung eines kleinsten Würfels im Würfel mittels Drehstreckung

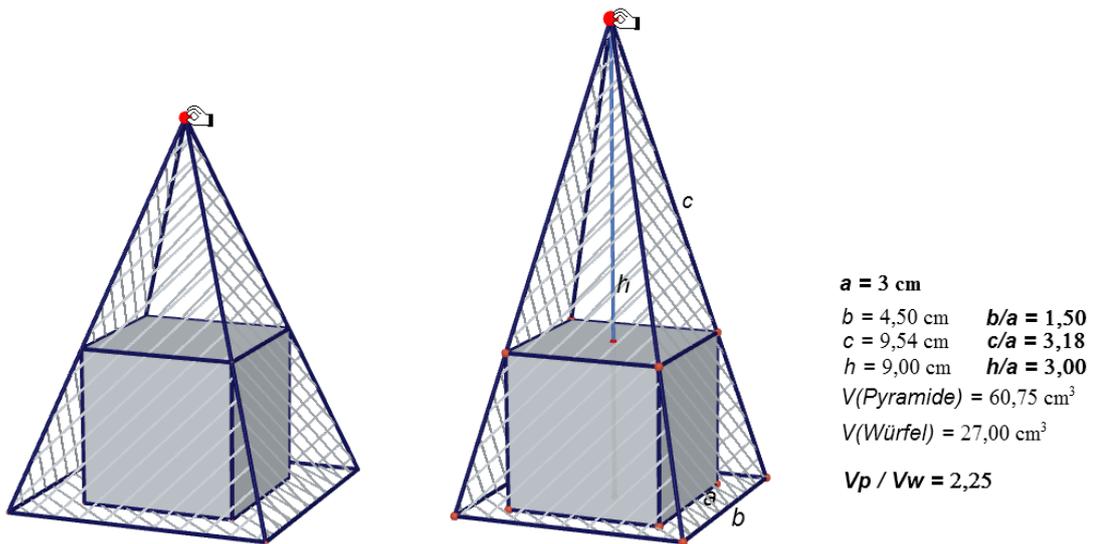


Abb. 2 Volumenminimierung einer umschriebenen quadrat. Pyramide

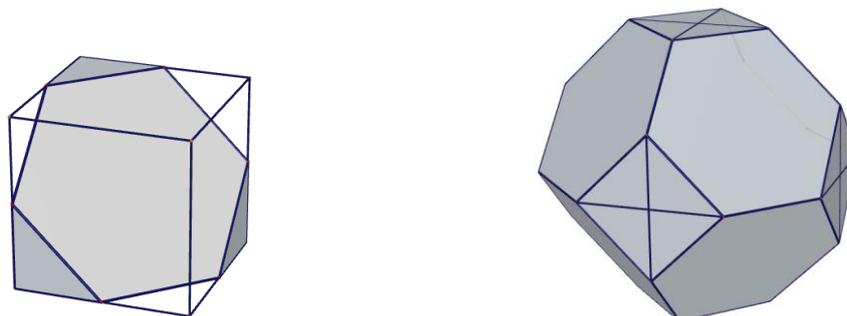


Abb. 3 Oktaederstumpf aus einer besonderen Würfelhälfte mittels Ebenenspiegelung

Verwandeln

Finde Verwandlungen (Metamorphosen) des Würfels.

Teilergebnis: s. Schumann (2016).

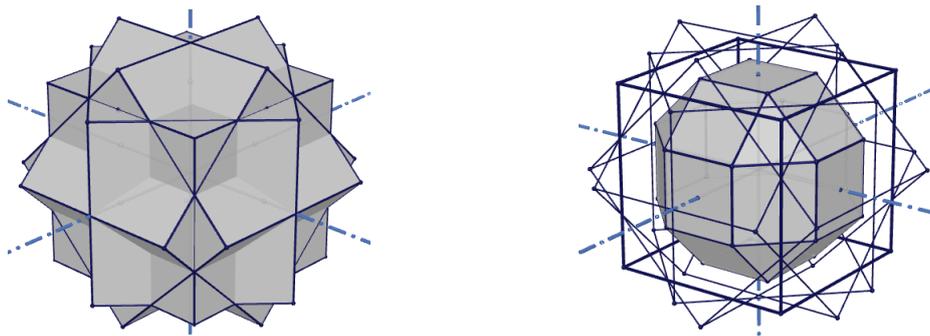


Abb. 4 Verbundpolyeder aus vier Würfeln mit Rhombenkuboktaeder als Durchdringungskörper

Zerlegen – Schneiden

Finde Zerlegungen des Würfels, die sich nach Form und Anzahl der Teilpolyeder unterscheiden.

Teilergebnis: Würfelzerlegung jeweils in ein Würfelpolytop, d. h., einen Körper, dessen Ecken Würfecken sind, und einen Restkörper (Abb. 5, Würfelabbaugruppierung der Polytope).

Finde die ebenen Schnitte des Würfels, die sich nach ihrer Art und Form unterscheiden.

Teilergebnis: Viereckschnitte sind, bis auf Ähnlichkeit, nur Quadrate (!), Rechtecke und mit besonderer Dimensionierung: Rauten, Parallelogramme und Trapeze.

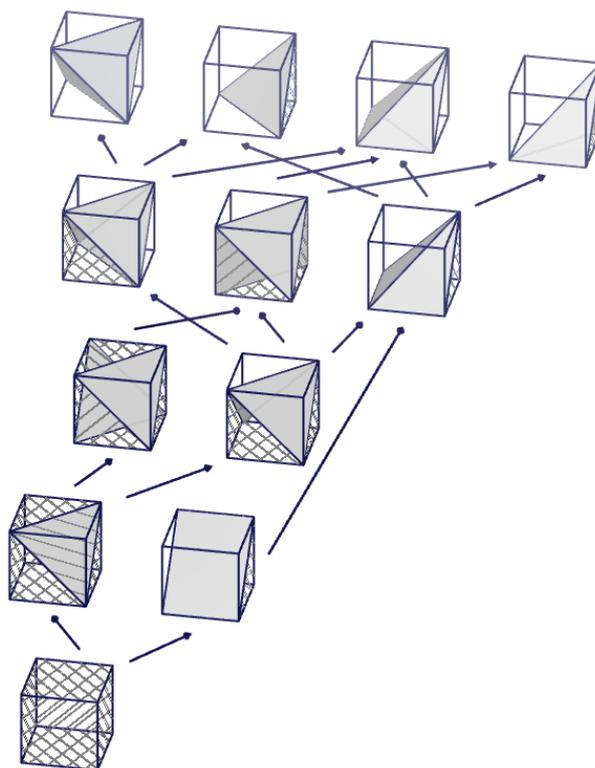


Abb. 5 Die Würfelpolytope

Literatur

- Bainville, E. & Laborde, J.-M. (2004-2015). *Cabri 3D* (Software). Grenoble: Cabrilog.
- Schumann, H. (1995). *Körperschnitte. Raumgeometrie interaktiv mit dem Computer*. Bonn: Dümmler
- Schumann, H. (2007). *Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum*. Hildesheim: Franzbecker
- Schumann, H. (2016). Polyeder-Metamorphosen konstruieren und animieren. *MNU Journal* (69), Heft 1, 21 – 25
- Winter, H. (1989). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*. Braunschweig: Vieweg