Johann SJUTS, Universität Osnabrück, DE

Anschlussfähigkeit von Modellvorstellungen zum Begründen in Mathematik

Übergänge und Abschlüsse im Bildungssystem können sich beständig einer erhöhten öffentlichen Aufmerksamkeit sicher sein. Mit ihnen sind zum einen bedeutsame Lebensereignisse und lebenslaufprägende Entscheidungen verbunden. Zum anderen richtet die Allgemeinheit den Blick auf sie, da die Ergebnisse als Kenngröße der Leistungsfähigkeit des Bildungssystems gelten.

So ist es nicht verwunderlich, dass Bildungspolitik und Bildungsadministration sich gewissermaßen ununterbrochen mit Übergängen und Abschlüssen beschäftigen und dazu schulrechtliche Bestimmungen erlassen. Laufende Änderungen und fortwährende Diskussionen bilden einen Dauerzustand.

Ebenso widmen sich Wissenschaft und Forschung den Übergängen und Abschlüssen im Bildungssystem. Kontinuität und Kohärenz in den Übergängen vom Kindergarten bis zum Studium zu gewährleisten, ist auch bei Lehr-Lern-Prozessen in Mathematik eine Herausforderung (Heinze & Grüßing 2009).

Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf den Übergang von der Grundschule zu den weiterführenden Schulen im Fach Mathematik. Im Mittelpunkt stehen Existenz und Eindeutigkeit beim Herleiten und Begründen von Lösungen als wesensbestimmend für mathematisches Denken.

Über welche Kompetenzen Schülerinnen und Schüler am Ende der Grundschulzeit verfügen sollen, ist bundeseinheitlich durch die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4) (KMK 2004) geregelt.

Darin heißt es: „Auftrag der Grundschule ist die Entfaltung grundlegender Bildung. Sie ist Basis für weiterführendes Lernen und für die Fähigkeit zur selbständigen Kulturaneignung. Dabei ist die Förderung der mathematischen Kompetenzen ein wesentlicher Bestandteil dieses Bildungsauftrags.“ Und weiter: „Dies gelingt umso nachhaltiger, je besser schon in der Grundschule die für die Mathematik insgesamt zentralen Leitideen entwickelt werden. (…) In den Vordergrund gestellt werden (…) allgemeine und inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen, die für das Mathematiklernen und die Mathematik insgesamt charakteristisch sind.“ (KMK 2004)

Zwar treten in den Bildungsstandards die Begriffe Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen sowie Lösbarkeit und Unlösbarkeit eines Problems nicht explizit auf. Eine genauere Betrachtung zeigt indes, dass 6 der 14 vorgelegten Aufgabenbeispiele, nämlich die Aufgaben „Stellentafel", „Zahlen zerlegen", „Würfel", „Dreiecke", „Muster aus Streifen", „Hunderter-Tafel" in ihren einzelnen Aufgabenteilen darauf gerichtet sind, eine Lösung (Frage der Existenz) bzw. alle Lösungen (Frage der Eindeutigkeit) zu finden oder nachzuweisen, dass es keine Lösung gibt. Man kann also feststellen, dass genau dies zum Charakteristikum für das Mathematiklernen in der Grundschule gehört und damit auch Bestandteil einer anschlussfähigen Grundlage ist.

Was bedeutet es, Anschlussfähigkeit sicherzustellen? Zum einen sind alle Phasen eines Bildungsgangs verpflichtet, auf Kontinuität zu achten. Das, was charakteristisch ist für Mathematik, muss durchgängig beim Lernen, Verstehen und Denken zum Ausdruck kommen. Zum anderen müssen alle Phasen die ihnen curricular auferlegten Standards erfüllen. Als zulässig kann eine Bandbreite an individuellen Entwicklungen gelten, nicht aber Beliebigkeit bei Mindestanforderungen oder gar deren Missachtung.

Die nachfolgenden Beispiele illustrieren grundlegendes und wesensbestimmendes mathematisches Denken. Die dokumentierten Schülereigenproduktionen sind direkt nach der Grundschulzeit zu Beginn des Schuljahrgangs 5 entstanden. Sie verdeutlichen das im Primarbereich vorhandene Potenzial.

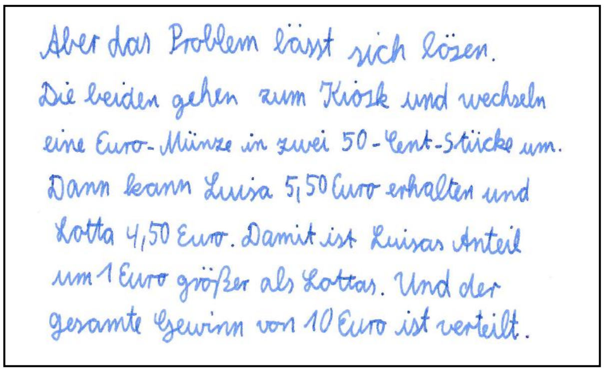
<u>Aufgabe</u>: *Luisa und Lotta freuen sich über ihren Gewinn von zehn Euro beim Münzen-Roulette. Lotta sagt zu Luisa: „Du hast den passenden Tipp gegeben. Ich schlage vor, dass dein Anteil um einen Euro größer ist als mein Anteil."*

Wie sind die gewonnenen zehn Euro-Münzen entsprechend diesem Vorschlag auf Luisa und Lotta zu verteilen?

Zehn Euro-Münzen lassen sich nicht so verteilen, dass Luisa eine Euro-Münze mehr bekommt als Lotta. Bekommt ~~Lotta~~ Luisa fünf Münzen, muss Lotta vier Münzen erhalten erhalten. Das sind insgesamt neun Münzen. Bekommt Luisa sechs Münzen, muss Lotta fünf Münzen erhalten. Das sind insgesamt elf Münzen. Also gibt es keine Lösung.

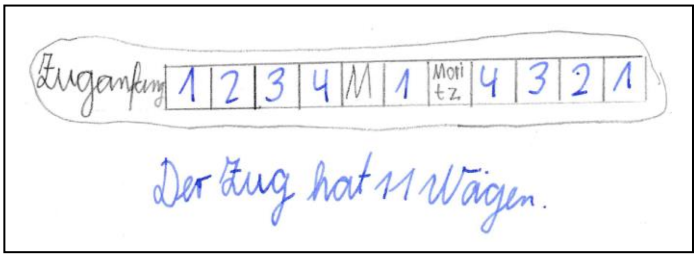
Diese Aufgabenbearbeitung verdeutlicht ein wesensbestimmendes Kennzeichen mathematischen Denkens: Es gibt keine Lösung. Und die Unlösbarkeit wird unumstößlich bewiesen.

Und diese Aufgabenbearbeitung zeigt ein weiteres wesensbestimmendes Kennzeichen mathematischen Denkens: Es gibt doch eine Lösung des Problems. Man findet sie durch Erweiterung des Lösungsbereichs.

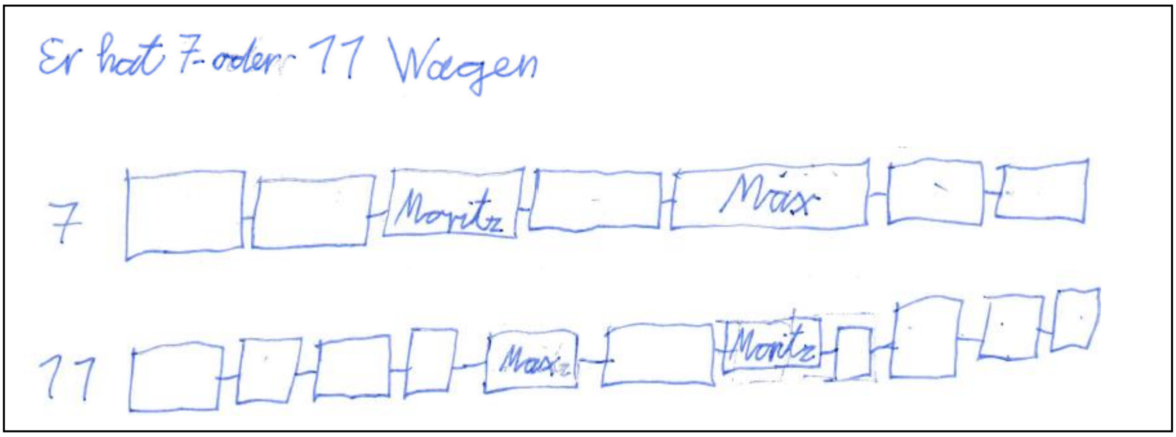

Aber das Problem lässt sich lösen. Die beiden gehen zum Kiosk und wechseln eine Euro-Münze in zwei 50-Cent-Stücke um. Dann kann Luisa 5,50 Euro erhalten und Lotta 4,50 Euro. Damit ist Luisas Anteil um 1 Euro größer als Lottas. Und der gesamte Gewinn von 10 Euro ist verteilt.

Zusammengefasst geht es in den beiden Aufgabenbearbeitungen – und dies ist ein grundlegendes und wesensbestimmendes Kennzeichen mathematischen Denkens – um die **Existenz** einer Lösung.

<u>Aufgabe</u>: *Max und Moritz fahren mit dem Zug. Max sitzt im fünften Wagen von vorn, Moritz im fünften Wagen von hinten. Zwischen beiden ist genau ein Wagen. Wie viele Wagen hat der Zug?*



Hier zeigt sich: Es gibt eine Lösung des Problems. Die Existenz einer Lösung ist gesichert.



Und hier: Es gibt nicht nur eine Lösung. Es gilt, alle Lösungen zu finden und zu zeigen, dass es keine weiteren Lösungen gibt.

Zusammengefasst geht es in diesen beiden Aufgabenbearbeitungen – und auch das ist ein grundlegendes und wesensbestimmendes Kennzeichen mathematischen Denkens – um die **Eindeutigkeit** einer Lösung.

Bezogen auf die illustrativen Beispiele gilt es, grundlegendes mathematisches Denken dadurch als Modellvorstellung zu verankern, dass der Mathematikunterricht es fortwährend pflegt und die wesensbestimmenden Kennzeichen mehr und mehr explizit macht.

(Vorstellungen sind interne Repräsentationen. Grundvorstellungen beschreiben, auf welche – durchaus verschiedenen, aber bedeutungsadäquaten und tragfähigen – Weisen man einen mathematischen Begriff oder eine mathematische Operation auffassen kann. Bei Modellvorstellungen handelt es sich um leistungsfähige mentale Modelle, die als organisierende Stützstrukturen des Denkens und Verstehens fungieren. Anders als Grundvorstellungen und Modellvorstellungen umfassen Vorstellungen in der Bezeichnung Schülervorstellungen ein ganzes Spektrum. Dieses reicht – bezogen auf die Begriffs- oder Operationsbedeutung – von einem inadäquaten bis zu einem adäquaten Zurechtlegen im Kopf.)

Die dargelegte Modellvorstellung, die das mathematische Denken zur Existenz und zur Eindeutigkeit beim Herleiten und Begründen von Lösungen umfasst, lässt sich bereits im Grundschulunterricht auf anschlussfähige Weise fundieren. Dafür stehen die genannten Beispiele. Für die prinzipielle Zugänglichkeit ist auf die von Jerome S. Bruner aufgestellte Hypothese zu verweisen, derzufolge jedem Kind auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lehrgegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form vermittelt werden kann (Bruner 1970). „Als Wertkriterium für einen Gegenstand, der in der Grundschule gelehrt wird, können wir fragen, ob er (in gänzlich entwickelter Form) verdient, dass ein Erwachsener ihn kennt.“ (Bruner 1970, S. 61) Und Bruner merkt an, dass „unsere Schulen möglicherweise wertvolle Zeit vergeuden, dass sie den Unterricht in vielen wichtigen Fächern mit der Begründung, sie seien zu schwierig, zurückstellen“, dass aber „die basalen Ideen, die den Kern aller Naturwissenschaft und Mathematik bilden, (…) ebenso einfach wie durchschlagend sind“ (Bruner 1970, S. 26).

Literatur:

Bruner, J. S. (1970). *Der Prozess der Erziehung*. Düsseldorf: Schwann.

Heinze, A. & Grüßing, M. (Hrsg.) (2009). *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht.* Münster: Waxmann.

KMK (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4).* Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15. Oktober 2004.