Anna-Christin SÖHLING, Universität zu Köln, DE

Wege der Erkenntnissicherung beim mathematischen Problemlösen

1. Einleitung

Beim mathematischen Problemlösen ist es möglich, dass SchülerInnen mathematische Zusammenhänge entdecken und damit zur Lösung kommen. Solche mathematischen Zusammenhänge eignen sich oftmals dazu, in verallgemeinerter Form auch bei Lösung weiterer Aufgaben zu helfen. Aus diesen Gründen räumt bereits Pólya der Phase der Rückschau eine besondere Bedeutung ein (Quelle), bei der Erkenntnisse verallgemeinert und ihre Anwendbarkeit auf andere Aufgaben untersucht werden sollen. Für den Mathematikunterricht kann es also gewinnbringend sein, mathematische Erkenntnisse, die beim Problemlösen gewonnen sind, zu sichern und aufzugreifen. Im Folgenden soll thematisiert werden, welche Wege der Erkenntnissicherung beim Problemlösen grundsätzlich möglich sind und naheliegend sein mögen, bevor Wege der Erkenntnissicherung, die SchülerInnen in empirischen Erhebungen aus eigener Kraft gelangen, theoretisch beschrieben werden.

2. Methoden und Analyseinstrument

Die folgenden Erkenntnisse stammen aus einem Dissertationsprojekt, für welches SchülerInnen der 4.-6. Klasse in Einzelinterviews laut denkend für sie schwierige Aufgaben lösen sollten. Dabei handelte es sich um klassische Problemaufgaben wie etwa die Hühner-Kaninchen-Aufgabe oder die Tor-Aufgabe. Die Transkripte der videographierten Interviews wurden in Anlehnung an die Methode der objektiven Hermeneutik interpretiert und mit dem Begriffsnetz der philosophisch-logischen Schlussformen nach Peirce (1903) und Meyer (2007) analysiert.

3. Erkenntnisgewinnung und Erkenntnissicherung aus philosophisch-logischer Sicht

Das philosophisch-logische Begriffsnetz nach Peirce und Meyer beschreibt den Zusammenhang der drei Schlussformen Deduktion, Induktion und Abduktion. Den Weg von der Entdeckung eines Zusammenhangs bis zu seiner Absicherung beschreibt Peirce zunächst folgendermaßen: Ein Zusammenhang zur Erklärung eines überraschenden Phänomens wird zunächst nur abduktiv vermutet. Im Anschluss daran werden mögliche Konsequenzen aus der Vermutung deduktiv abgeleitet. Die Gültigkeit der Vermutung wird dabei provisorisch angenommen. Im letzten Schritt werden die Voraussagen an empirischen Fällen induktiv überprüft (vgl. Meyer 2007, S. 64). Meyer differenziert dies weiter aus und unterscheidet zwei empirische und einen theoretischen Erkenntnisweg. Für die folgenden Ausführungen ist von den beiden empirischen Erkenntniswegen vor allem das Bootstrap-Modell von Interesse.

Beim Bootstrap-Modell wird davon ausgegangen, dass die bei der Generierung der Hypothese betrachteten Phänomene Einzelfälle eines dahinterliegenden, allgemeinen Gesetzes seien (vgl. Meyer 2007, S. 65f), weshalb eine Überprüfung des Gesetzes durch die Prüfung weiterer Einzelfälle erfolgen kann. Es werden also hypothetisch für weitere Fälle Resultate ermittelt, bevor durch ein empirisches Experiment geprüft wird, ob die mittels der Hypothese getroffenen Vorhersagen eintreffen.

Bei der Erkenntnissicherung auf dem theoretischen Erkenntnisweg gelingt es, „ausgehend von Abduktionen letztendlich Gewissheit durch Deduktionen" (Meyer 2007 S. 76) zu erreichen. Dabei wird deduktiv auf das entdeckte Gesetz geschlossen, wobei bereits bekannte mathematische Zusammenhänge genutzt werden. Neu entdeckte mathematische Zusammenhänge erhalten also dadurch einen Geltungsanspruch, dass man deduktiv mithilfe bereits bekannter Gesetze oder Zusammenhänge auf sie schließen kann.

4. Wege der Erkenntnissicherung in der eigenen Erhebung

Insgesamt konnten die folgenden Wege der Erkenntnissicherung beobachtet werden:

(1) Bestätigung der Entdeckung durch Erzielen der Lösung

Wie viele weitere Schüler in der Erhebung entdeckt Emma einen Zusammenhang, den sie dazu nutzt, um die Lösung zu erzielen. Ihre Entdeckung scheint für sie dadurch plausibel zu werden und sie überprüft ihre Entdeckung nicht weiter.

(2) Paralleles Arbeiten mit neuem und altem Lösungsweg

Alex findet einen umständlichen Lösungsweg und sucht gleichzeitig nach einem schnelleren. Mögliche neue Lösungswege überprüft er, indem er feststellt, ob auf ihnen die gleichen Zwischenergebnisse erzielt werden. So verwirft er einige Ansätze, aber auch seinen erfolgreichen neuen Ansatz überprüft er weiterhin durch paralleles Arbeiten.

(3) Paralleles Arbeiten in der Zahlenwelt und im Sachkontext

Paulina hat Schwierigkeiten bei der Mathematisierung der Aufgabenstellung. Durch das Arbeiten in der Zahlenwelt prüft sie ihre mathematische Interpretation des Sachkontexts, während sie gleichzeitig den Sachkontext heranzieht, um ihre Mathematisierung anzupassen. Ihr letztendlich gefundener Lösungsweg hilft ihr sowohl dabei, eine Schwierigkeit, die ihr in der Zahlenwelt begegnet ist, zu beheben, als auch dabei, den Sachkontext sinnvoll zu mathematisieren.

Grundsätzlich sind noch andere Wege der Erkenntnissicherung denkbar wie zum Beispiel, dass die Passung des entdeckten Zusammenhangs zur mathematischen Struktur überprüft wird.

In der Erhebung wurden Aufgaben gestellt, bei denen die Lösung am Aufgabentext überprüfbar war. Dies sollte bei den folgenden Ausführungen berücksichtigt werden.

Die ersten beiden Möglichkeiten lassen sich theoretisch als Differenzierungen des Bootstrap-Modells betrachten.

Beim ersten möglichen Weg der Erkenntnissicherung (1) entdeckt ein Problemlöser eine Gesetzmäßigkeit, auf deren Grundlage er eine Voraussage über ein weiteres Resultat (Lösung des Problems) trifft, welches sich mittels der entdeckten Gesetzmäßigkeit aus einem noch zu überprüfenden Fall ergeben muss. Der zu überprüfende Fall könnten etwa weitere Zahlenwerte sein, die als Lösung infrage kommen. Im Folgenden sei der induktive Schritt der Bestätigung des Gesetzes allgemein schematisch dargestellt:

Induktion

Fall:	Prüfen weiterer infrage kommender Werte
Resultat:	Einer der Werte ergibt bei Anwendung der Gesetzmäßigkeit die Lösung
Gesetz:	Bestätigung der dem neuen Lösungsweg zugrundeliegenden Gesetzmäßigkeit

Beim zweiten Weg (2) trifft ein Schüler auf der Grundlage eines neu entdeckten mathematischen Zusammenhangs Voraussagen über weitere Probierergebnisse oder Berechnungen und versucht gleichzeitig aber auf dem bisherigen „sicheren“ Weg, die gleichen Resultate zu erzielen. Der Schüler fährt dabei zweigleisig: Ein alter, möglicherweise umständlicherer Weg wird parallel zu einem neuen, schnelleren, aber unsichereren Weg genutzt. Wenn der Schüler auf beiden Wegen zum gleichen Ergebnis kommt, kann er mehr Sicherheit über den neuen Lösungsweg gewinnen. Schematisch dargestellt:

Induktion

Fall:	Auf dem neuen unsicheren Lösungsweg werden Teillösungen T und die Lösung L erzielt.
Resultat:	Auf einem bekannten umständlicheren Lösungsweg werden die gleichen Teillösungen T und die Lösung L erzielt.
Gesetz:	Bestätigung der dem neuen Lösungsweg zugrundeliegenden Gesetzmäßigkeit

Der dritte Weg (3) unterscheidet sich insofern von den ersten beiden Wegen, als dass hier die Passung zwischen Sachkontext und Zahlenwelt als wechselseitige Kontrollfolie dient, um einen erkannten Zusammenhang zu akzeptieren oder zu verwerfen. Gemäß dem von Meyer beschriebenen theoretischen Erkenntnisweg wird hier eine entdeckte Gesetzmäßigkeit nicht an weiteren Fällen oder an Resultaten, die auf einem parallelen Weg ermittelt werden, überprüft, sondern es wird die Gesetzmäßigkeit im Kontext der Aufgabenstellung erklärt.

5. Fazit

Es gibt also mehrere Möglichkeiten, wie Schüler beim Problemlösen nach dem Entdecken eines mathematischen Zusammenhangs dessen Gültigkeit überprüfen und sich erklären können. Wenn Erkenntnisse mittels des Bootstrap-Modells überprüft werden, kann es sein, dass nur die Gültigkeit der Lösung plausibel wird. Dabei muss allerdings nicht tiefergehend verstanden werden, warum ein bestimmter Lösungsweg, der zu dieser Lösung geführt hat, zur Aufgabenstellung passt. Dies scheint gerade bei probierenden Verfahren beim Problemlösen eine Gefahr zu sein. Hier kann die Möglichkeit des Überprüfens am Aufgabentext die Gefahr bergen, dass das Verständnis mathematischer Zusammenhänge nicht so sehr gefordert ist wie etwa bei offeneren Aufgaben, bei denen eine Überprüfung auch Überlegungen zum Aufgabenkontext und zu geltenden mathematischen Beziehungen einhalten muss. Dies schließt sich an die Unterscheidung von Funke (2003) zwischen implizitem und explizitem Wissen an, welches beim Problemlösen je nachdem, ob entdeckte Zusammenhänge lediglich angewendet oder auch geprüft werden, gewonnen werden kann.

Wenngleich es sinnvoll ist, wenn die SchülerInnen ihre Lösungen am Aufgabentext überprüfen, und viele SchülerInnen dies auch erst lernen müssen, sollte sich die Rückschau-Phase keineswegs darauf beschränken. Zusätzlich sollte die Lehrkraft dabei helfen, die den Lösungswegen innewohnenden Prinzipien herauszuarbeiten und eine Verbindung zwischen Sachkontext und Zahlenwelt herzustellen.

Literatur

Funke, J. (2003). *Problemlösendes Denken*. Stuttgart: Kohlhammer.

Meyer, M. (2007). *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument.* Dissertation. Hildesheim: Franzbecker.

Peirce, C.S. *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, (Band 1-6. C. Hartshorne & P. Weiß (Hrsg.), 1931-35; Band 7-8 A.W. Burks (Hrsg.), 1985), Cambridge: Harvard University Press.

Pólya, G. (2010). *Schule des Denkens.* Tübingen: Francke.