Daniel SOMMERHOFF, Stefan UFER, Ludwig-Maximilians-Universität München, Ingo KOLLAR, Universität Augsburg, DE

Der Einfluss individueller kognitiver Ressourcen von Studierenden auf die Konstruktion von Beweisen

Als wissenschaftliche Disziplin beruht Mathematik methodisch maßgeblich auf mathematischen Beweisen, weshalb sie auch oft als beweisende Wissenschaft bezeichnet wird (z.B. Heintz, 2000). Entsprechend bilden der Aufbau eines kompetenten Umgangs mit Argumentationen und Beweisen ein wichtiges Lernziel, sowohl in der Schule (Common Core State Standards Initiative, 2010; KMK, 2012), als auch später an der Universität. Trotz des hohen Stellenwerts belegen jedoch Studien wiederholt, dass Schülerinnen und Schüler, wie auch Studierende der Mathematik, große Probleme beim Umgang mit Beweisen haben (vgl. Inglis & Alcock, 2012; Weber, 2003). Es zeigt sich sowohl, dass viele Studierende kaum in der Lage sind, einen gültigen Beweis zu erstellen (z.B. Weber, 2001), als auch, dass es große interindividuelle Unterschiede zwischen den Studierenden gibt. Offen ist bisher allerdings, ob und in welchem Ausmaß diese unterschiedliche Leistung im Konstruieren von Beweisen von den individuellen kognitiven Ressourcen der Studierenden abhängt.

1. Theoretisches Framework

Aufbauend auf dem Kompetenzbegriff von Klieme und Leutner (2006) sowie dem Kompetenzmodell von Blömeke, Gustafsson und Shavelson (2015) wird die Kompetenz im Umgang mit Beweisen maßgeblich durch die verschiedenen Anforderungssituationen im Umgang mit Beweisen sowie den der Kompetenz zu Grunde liegenden individuellen Ressourcen charakterisiert (vgl. Abbildung 1). Die vorliegende Studie betrachtet ausschließlich die Konstruktion von Beweisen als Anforderungssituation (vgl. Mejía-Ramos & Inglis, 2009 für einen Überblick über verschiedene Anforderungssituationen) und richtet sein Augenmerk auf den Einfluss verschiedener individueller Ressourcen auf diese Anforderungssituation.

In der mathematikdidaktischen Literatur wurden verschiedene Ressourcen identifiziert, für die teilweise ein positiver Zusammenhang mit der Kompetenz im Umgang mit Beweisen von Schülerinnen und Schülern, sowie seltener von Studierenden, nachgewiesen werden konnte. So wurde beispielsweise inhaltliches Wissen in zahlreichen Studien als wichtige Grundlage hervorgehoben. In einer qualitativen Studie konnte Weber (2001) jedoch zeigen, dass inhaltliches Wissen alleine noch nicht ausreichend ist, um erfolgreich Beweise zu konstruieren, sondern auch ein mathematisch-strategisches Wissen benötigt wird, welches beispielsweise *approach strategies* für Aufgaben beinhaltet. Neben solchen domänen-spezifischen Ressourcen werden jedoch auch domänen-generelle Ressourcen wie schlussfolgerndes Denken, Problemlösen und Metakognition als einflussreiche Ressourcen genannt. Allerdings wird in den zu Grunde liegenden Studien zumeist nur der direkte Einfluss einer einzelnen Ressource untersucht. Die wenigen Studien, die verschiedene Ressourcen vergleichen (vgl. Chinnappan, Ekanayake, & Brown, 2011; Ufer, Heinze, & Reiss, 2008), beziehen sich fast ausschließlich auf schulisches Lernen und Beweise im Inhaltsbereich Geometrie. Entsprechend ist ein Vergleich des Einflusses einzelner Ressourcen bisher nur eingeschränkt möglich.

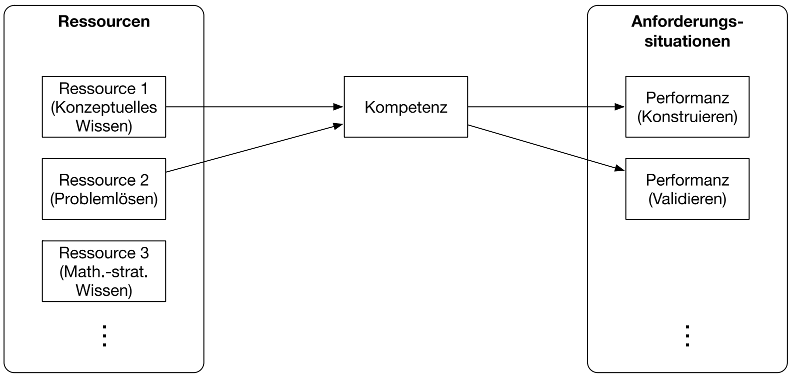

Abbildung 1. Kompetenzmodell aufbauend auf Blömeke, Gustafsson und Shavelson (2015) im Kontext von Beweisen

2. Fragestellungen

Ziel der Studie war es, den relativen Einfluss verschiedener individueller kognitiver Ressourcen (konzeptuelles sowie prozedurales mathematisches Wissen, mathematisch-strategisches Wissen, Problemlösen, Schlussfolgern, metakognitives Bewusstsein) von Studierenden der Mathematik auf deren Kompetenz im Konstruieren von Beweisen zu untersuchen.

3. Methodik

In einer Querschnittstudie mit $N = 64$ Studierenden der Mathematik aus dem 1. und 3. Semester bearbeiteten diese je vier Items zum Konstruieren von Beweisen. Darüber hinaus wurden das konzeptuelle sowie das prozedurale mathematische Wissen im Inhaltsbereich der Beweise (Analysis 1), mathematisch-strategisches Wissen, Problemlösekompetenz, schlussfolgerndes Denken sowie metakognitives Bewusstsein gemessen. Die gewonnenen Daten wurden mittels generalisierter linearer Mischmodelle ausgewertet, um den Einfluss der sechs Ressourcen auf die Leistung im Konstruieren von Beweisen zu untersuchen. Dafür wurden sämtliche mögliche Modelle berechnet und das für kleine Stichproben korrigierte Akaike Informationskriterium (*AICc*) zur Auswahl des Modells verwendet. Da kein eindeutig bestes Modell ausgemacht werden konnte, wurde über die besten Modelle ($\Delta AICc < 4$)

gemittelt (vgl. Zuur, Ieno, & Saveliev, 2009).

4. Ergebnisse

Da eine deskriptive Analyse der teils adaptierten, teils neu erstellten Skalen keinerlei negative Auffälligkeiten aufwies, wurden alle sechs Ressourcen in die Analyse einbezogen. Dabei zeigte sich, dass bis auf das metakognitive Bewusstsein und Problemlösen alle theoretisch abgeleiteten Ressourcen signifikant mit der Leistung im Konstruieren von Beweisen korrelierten.

Das berechnete, optimale generalisierte lineare Mischmodell beinhaltet alle sechs Ressourcen. Von diesen zeigten alle drei domänen-spezifischen Ressourcen, d.h. konzeptuelles mathematisches Wissen, prozedurales mathematisches Wissen sowie mathematisch-strategisches Wissen, jeweils einen signifikanten Einfluss. Von den verbleibenden, domänen-generellen Ressourcen zeigte nur Schlussfolgern einen nennenswerten Einfluss, der aber nicht signifikant wurde.

5. Diskussion

Die Analysen belegen, wie groß der Einfluss von domänen-spezifischem Wissen auf den Erfolg im Konstruieren von Beweisen ist. Neben den beiden Wissensfacetten zeigt sich hier insbesondere der Einfluss von mathematisch-strategischem Wissen, welches bisher wenig und auch nur in qualitativen Studien (vgl. Weber, 2001) beachtet wurde. Der Einfluss von domänen-übergreifenden Ressourcen ist hingegen eher gering. Erstaunlich erscheint hier der quasi nichtexistente Einfluss von Problemlösen, hatte sich dieses doch beispielsweise bei Chinnappan, Ekanayake & Brown (2011) als signifikanter Prädiktor ergeben. Obwohl die Daten der Studie hier keine genauen Schlüsse zulassen, gibt es doch zwei naheliegende Erklärungen für diesen Befund. Einerseits könnte es sein, dass der bisher dem Problemlösen zugeschriebene Anteil an der Varianzaufklärung teilweise durch das mathematisch-strategische Wissen erklärt wird. Da beide Variablen in der vorliegenden Stichprobe jedoch nur sehr schwach und nicht signifikant korrelieren, unterstützen die Daten diese Erklärung nicht. Andererseits könnte der Unterschied auf den unterschiedlichen Kontexten der Studien beruhen. Möglicherweise spielt Problemlösen beim Lösen von Geometrieaufgaben durch Schülerinnen und Schüler eine größere Rolle als bei Beweisen im Bereich Analysis bei Studierenden. Insbesondere haben Studierende potentiell bereits mehr Aufgaben ähnlichen Typs bearbeitet und die Aufgaben stellen daher kein Problem in dem Sinne dar, dass ihnen der korrekte Ansatz (*approach strategy*) fehlt, was jedoch schwerpunktmäßig mit der Skala Problemlösen gemessen wurde.

Insgesamt liefern die Daten erste Indizien dafür, welche Ressourcen den Studierenden, die Probleme mit Beweisen haben, fehlen könnten und welche entsprechend stärker instruktional fokussiert werden sollten. Entsprechende Studien, die auch einen kausalen Zusammenhang zwischen den Ressourcen und der Leistung im Konstruieren von Beweisen liefern, würden wichtige neue Informationen liefern.

Literatur

Blömeke, S., Gustafsson, J.-E., & Shavelson, R. J. (2015). Beyond Dichotomies. *Zeitschrift Für Psychologie*, *223*(1), 3–13.

Chinnappan, M., Ekanayake, M., & Brown, C. (2011). Specific and general knowledge in geometric proof development. *SAARC Journal of Educational Research*, *8*, 1–28.

Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. Retrieved from http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math Standards.pdf

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik*. Wien: Springer.

Inglis, M., & Alcock, L. (2012). Expert and novice approaches to reading mathematical proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(4), 358–390.

Klieme, E., & Leutner, D. (2006). Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen. Beschreibung eines neu eingerichteten Schwerpunktprogramms der DFG. *Zeitschrift für Pädagogik*, *52*(6), 876–903.

KMK (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss vom 18.10.2012*. (Beschlüsse der KMK), Bonn.

Mejía-Ramos, J. P., & Inglis, M. (2009). Argumentative and proving activities in mathematics education research. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 88–93). Taipei, Taiwan.

Ufer, S., Heinze, A., & Reiss, K. (2008). Individual predictors of geometrical proof competence. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the XX North American Chapter* (Vol. 1, pp. 361–368). Morelia, Mexico: PME.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 101–119.

Weber, K. (2003). Students’ difficulties with proof. In A. Selden & J. Selden (Eds.), *The Mathematical Association of America Online: Research Sampler* (Vol. 8). Retrieved from http://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/research-sampler-8-students-difficulties-with-proof

Zuur, A. F., Ieno, E. N., & Saveliev, A. A. (2009). *Mixed effects models and extensions in ecology with R*. New York: Springer.