

## Domain-Specific Beliefs zur Analysis von Lehrkräften

Dass die Auffassungen von Mathematik eine zentrale Rolle für das individuelle Mathematiklernen spielen, ist eine weit geteilte Hypothese. Auch dass ebenso die Auffassungen von Lehrpersonen Einfluss auf die methodische und inhaltliche Gestaltung des Mathematikunterrichts haben - und damit mittelbar auf den Lernerfolg und wiederum auf die Auffassungen der Lernenden - ist dokumentiert. Weniger gut untersucht sind in diesem Zusammenhang beliefs mit Bezug auf einzelne Stoffgebiete (domain-specific beliefs), obgleich dies konkreter stoffdidaktischer Forschung zugleich als Ausgangspunkt und Korrektiv dienen kann. Die hier skizzierten Ergebnisse ergänzen bisherige Arbeiten zu analysis-spezifischen Auffassungen (vgl. etwa Ehrens & Eichler (2013), Rolka u.a. oder Tall (2013)) und fokussieren auf die Perspektive der Lehrenden.

**Domainspecific-Beliefs von Studienanfängern.** Im Rahmen unserer Studie wurde 83 Studierenden im ersten Fachsemester Lehramt, vor ihrer ersten Mathematikvorlesung, an den Universitäten Köln und Siegen ein gemischt halboffener Fragebogen<sup>1</sup> vorgelegt. Als besonders fruchtbare Quelle erwies sich ein offen gestellter Teil in dem die angehenden Studierenden aufgefordert waren, ihre Assoziationen zu Kernbegriffen der Analysis wiederzugeben. Vor allem dieser Teil wurde im Rahmen eines Publikationsprojektes (vgl. Witzke & Spies 2016) im methodischen Rahmen einer qualitativen Inhaltsanalyse ausgewertet. Dabei ergaben sich eine Vielzahl von interessanten Ergebnissen, von denen einige im Folgenden kurz genannt seien: 1.) Elementargeometrische Vorstellungen (z.B. hinsichtlich eines globalen Verständnis von Tangenten) sind nach wie vor vorrangig und werden von Studierenden vor ihrer ersten Vorlesung selbst dann aktiviert, wenn die Rahmung der Erhebungssituation klar im Kontext der Analysis verortet ist. 2.) Unter den Teilnehmern war als Antworttyp die *schematisch-symbolische Orientierung* (Witzke & Spies 2016), über den “rigid tool-box aspect” (vgl. Grigutsch et al. 1998) hinaus häufig anzutreffen, was in unserer Lesart auf einen rein syntaktisch-mechanischen symbolischen Umgang mit Analysis verweist. 3.) Die in der Studie erfassten domain-specific beliefs spiegeln in der Breite nicht die Bemühungen der Mathematikdidaktik in jüngerer Zeit nach Verortung der Analysis in Sachkontexten (z.B. im Zusammenhang der

---

<sup>1</sup> Der Fragebogen ist unter <http://www.uni-siegen.de/fb6/didaktik/personen/ingo-witzke/auffassungenanalysis.html> einsehbar.

Interpretation von momentanen Änderungsraten als Momentangeschwindigkeiten) wieder. 4.) Wenn Studierende innerhalb unserer Studie semantische Interpretationen mit Schlüsselbegriffen der Analysis verbanden, waren diese überwiegend in einem empirisch-geometrischen Kontext verortet: *Funktionen mit Kurven, der Ableitungsbegriff mit Tangentensteigungen, der Integralbegriff mit Flächenmaßen, Extremwerte mit Extrempunkten etc.* (vgl. Witzke & Spies 2016, S. 148). Während die ersten beiden Ergebnisse in der mathematikdidaktischen Literatur wohlbeforscht sind (vgl. bspw. Büchter (2014), Danckwerts & Vogel (2006) oder Greefrath u.a. (2016)) haben wir die weiteren hier geschilderten Ergebnisse mit Überraschung aufgenommen: Berücksichtigt man aktuelle mathematikdidaktische Literatur sowie die Vorgaben in den Bildungsstandards und ihre Umsetzung in Schulbüchern, so wird unmittelbar klar, dass z.B. dem Begriff der Momentangeschwindigkeit im Zusammenhang des Aufbaus von Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff eine zentrale Rolle zukommen soll. Die Bemühungen darum scheinen zumindest bei den Teilnehmern unserer Studie – immerhin eine Positivauswahl von Studierenden die das Fach Mathematik als Studienfach im Lehramtsstudium gewählt haben – nicht zu nachhaltigen Primärassoziationen geführt zu haben.

Aus der durchgeführten empirischen Studie ergibt sich nun eine Reihe von weiteren Forschungsfragen, die lohnenswert im Rahmen eines Beitrages zur Grundlegung der Analysisdidaktik erscheinen. So gilt es weiter zu klären ob und warum, neben der *schematisch-symbolischen Orientierung* einige Schüler tatsächlich eine empirisch-geometrische Auffassung von Analysis auf Grundlage eines Funktionsbegriffes im Sinne von auf dem Zeichenblatt gegebenen Kurven erwerben (*empirische Orientierung*). Dies hätte wesentliche Implikationen insbesondere für die Anfangsvorlesungen an Hochschulen. Zöge gleichzeitig aber auch eine Reihe bildungstheoretischer und normativer Fragestellungen mindestens bezüglich der Grundannahmen der Stoffdidaktik Analysis nach sich. Um diesen Fragestellungen im Weiteren nachzugehen, gehen Folgeuntersuchungen in drei Richtungen: Eine systematische Analyse von Schulbüchern könnte Auskunft darüber geben warum gewisse domain-specific beliefs, wie *schematisch-empirische* oder die *schematisch-symbolische Orientierung* (Witzke & Spies (2016)) andere zu dominieren scheinen. Hinsichtlich einer Vermittlung einer *schematisch-empirischen* oder einer *schematisch-symbolischen Orientierung* im Analysisunterricht stellen sich weiterhin normative und präskriptive Fragestellungen hinsichtlich der Auffassung über den ontologischen Status der Gegenstände, die es im Analysisunterricht zu unterrichten gilt. Hier legen unsere bisheri-

gen Ergebnisse nahe, dass die große Zahl von gleichzeitig angebotenen Kontexten (Anwendung, Geometrie & Formales) für Begriffsbildungsprozesse und den Aufbau eines tragfähigen Bildes von Analysis hinderlich wirken kann. Die Bedingungen dafür näher zu beschreiben (z. B. im Rahmen Subjektiver Erfahrungsbereiche nach H. Bauersfeld), sowie exemplarische konstruktive Vorschläge auf Grund dieser Erkenntnis vorzulegen, erscheinen für uns als lohnenswerte Unterfangen im Rahmen einer modernen Stoffdidaktik. Hier können auch erkenntnistheoretische, historisch informierte Studien, z.B. zur Analysisauffassung von Leibniz, Euler, Cauchy oder Weierstraß von großer Bedeutung bei der Grundlegung und Auswahl der Inhalte sein, wie auch für den Einsatz in der universitären Lehrerbildung nutzbar gemacht werden (vgl. Allmendinger u.a. (2015), Spies & Witzke (o.J.)). Darüber hinaus bieten die Ergebnisse einer Folgestudie unter Oberstufenlehrkräften Anknüpfungspunkte für die weitere Einordnung der Ergebnisse.

**Folgeuntersuchung bei Mathematiklehrkräften.** Für die Folgeuntersuchung unter aktiven Mathematiklehrkräften zu domain-specific beliefs setzen wir eine im Assoziationsteil leicht modifizierte Variante des Studierendenfragebogens ein; so gab es beispielsweise einen zusätzlichen offenen Teil zur unterrichtlichen Einführung des Ableitungs- und Integralbegriffes. Die Umfrage wurde im letzten Jahr unter den Teilnehmern einer Fortbildung durchgeführt und dürfte Anhaltspunkte darüber geben, in wie fern von Lehrern Auffassungen wie die oben für Schüler genannten angeregt werden: Eine erste wichtige, und am Material weiter zu entwickelnde und zu belegende Hypothese betrifft etwa eine möglicherweise von Lehrern und Schülern verschieden wahrgenommene Rolle von Anschauungsmaterial: Demnach könnten Lehrer im Unterricht mit der Verwendung von Zeichnungen und Mitteln wie dem "Tangentensurfer" (vgl. Lambacher Schweizer) die Absicht verfolgen, eine eigentlich formal-abstrakte Theorie von Analysis nur anschaulich vermitteln zu wollen, unter der Annahme, diese müsste sich dann auch bei ihren Schülern ausprägen. Während die Schüler in Auseinandersetzung mit „realen Arbeits- und Anschauungsmitteln“ tatsächlich eine Analysisauffassung genau über diese Gegenstände - also eine *empirischen Orientierung* - aufbauen. Dies scheint nach konstruktivistischen Lehr-Lern-Modellen durchaus denkbar und gewisse von uns bei Schülern erhobene sprachliche Mischformen wie „*die Steigung einer Funktion*“ oder „*das Integral ist die Fläche unter der Funktion*“ scheinen in diese Richtung zu weisen.

Eine vorläufige Auswertung der Fragebögen der Lehrer auf der Grundlage des in (Witzke & Spies, 2016) erarbeiteten Kategoriensystems zeigt, dass die

Assoziationen der Lehrer im Vergleich zu denen der Schüler sprachlich deutlich differenzierter, inhaltlich angemessener und zumeist unmissverständlich hinsichtlich des gemeinten Gegenstandsbereiches ausfallen. Was der obigen Hypothese zumindest nicht widerspricht. Mit Blick auf den aus aktuell stoffdidaktischer Sicht erstaunlichen Mangel an *Anwendungsorientierung* bei den Studierenden lohnt sich ebenfalls ein Vergleich mit den Ergebnissen der Lehrenden. So ist ein Befund aus den Lehrerantworten, dass diese ähnlich wie die Schüler, realistische Kontexte eher zu Rechtfertigungszwecken für das Lernen von Mathematik allgemein heranziehen, darüber hinaus aber im Assoziationsteil sowie bei den Ausführungen zur Unterrichtspraxis selten benannt wurden.

## Literatur

- Allmendinger, H., Nickel, G. & Spies, S. (2015). Original sources in teachers training - possible effects and experiences. In: E. Barbin, U. Jankvist & T. Hoff Kjeldsen (eds.): *History and Epistemology in Mathematics Education. Proceedings of ESU 7* (pp. 551-564).
- Büchter, A. (2014). Analysisunterricht zwischen Begriffsentwicklung und Kalkülaneignung – Befunde und konzeptionelle Überlegungen zum Tangentenbegriff. *Der Mathematikunterricht*, 60(2), 41–49.
- Erens, R., & Eichler, A. (2013). Reconstructing Teachers' beliefs on calculus. In B. Ubuz et al. (Ed.), *Proceedings of CERME 8* (pp. 1329–1338).
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis - Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Springer Spektrum.
- Grigutsch, S., Raatz, U., & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 19(1), 3–45.
- Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2013): *Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium / Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen (Mathematik)*, Heft 4720.
- Rösken, B., & Rolka, K. (2007). Integrating intuition: The role of concept image and concept definition for students' learning of integral calculus. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 3, 181–204.
- Spies, S. & Witzke, I. (o.J.). *Making Domain specific beliefs explicit for prospective teachers – an example of using original sources*, 13th ICME, Hamburg. - im Erscheinen.
- Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically*. New York: Cambridge University Press.
- Witzke, I. & Spies, S. (2016): Domain-Specific Beliefs of School Calculus. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 37(1), S. 131-161.
- Witzke, I. (2014): Zur Problematik der empirisch-gegenständlichen Analysis des Mathematikunterrichts. In: *Der Mathematikunterricht* 2/14, S. 19-31.