

Eine empirische Studie zum Dezimalbruchverständnis aus inferentialistischer Perspektive

Einführung

Der verständige Umgang mit Dezimalbrüchen ist sowohl in der Schule als auch im Alltag von zentraler Bedeutung. Trotz dieser hohen Alltagsrelevanz und der meist täglichen Konfrontation mit Dezimalbrüchen z. B. im Umgang mit Geld und Größen, können selbst bei Lernenden am Ende der Sekundarstufe I immer wieder spezifische Schwierigkeiten identifiziert werden. Diese zeigen sich insbesondere im Dezimalbruchvergleich, bei der wechselseitigen Umformung von Dezimalbrüchen und gemeinen Brüchen sowie bei den Rechenoperationen (vgl. u. a. Padberg 2009; Heckmann 2006; Steinle & Stacey 2004). Die Hauptursachen dafür liegen meist in einem unzureichenden grundlegenden Verständnis der Dezimalbrüche und sind in der Regel auf ein unausgereiftes Stellenwertverständnis sowie fehlende bzw. nicht tragfähig erweiterte inhaltliche (Bruch-)Vorstellungen zurückzuführen. Das folgende Beispiel einer Schülerin (Abb. 1) verdeutlicht eine typische Interpretation beim Vergleich zweier Dezimalbrüche, bei der davon ausgegangen wird, dass der Dezimalbruch größer wird je weniger Nachkommastellen er hat.

A rectangular box containing handwritten text in German. The text reads: "Eine Stelle hinterm Komma ist mehr wert als zwei". The handwriting is in a cursive style, typical of a child's writing.

Abb. 1: Aussage von Hanna, 8. Klasse Hauptschule, als Begründung eines Dezimalbruchvergleichs

Diese und ähnliche Interpretationen sind zahlreich dokumentiert (vgl. u. a. Padberg 2009; Heckmann 2006; Steinle & Stacey 2004; Roche & Clark 2004). Trotz dieser bedeutsamen Problemlage besteht allerdings immer noch eine Forschungslücke bei der Rekonstruktion von individuellen Begründungsstrukturen und Handlungsweisen beim situationsspezifischen Umgang mit Dezimalbrüchen. Im vorliegenden Beitrag werden Ergebnisse eines Dissertationsprojektes zum Dezimalbruchverständnis vorgestellt, das dieses Forschungsdesiderat aufgreift. Dabei liegt das Forschungsinteresse in der Rekonstruktion der individuellen Begründungsstrukturen und des zugrundeliegenden konzeptuellen Dezimalbruchverständnisses der Schülerinnen und Schüler. Ein Verständnis der Begründungsstrukturen bedeutet einerseits die individuellen Denk- und Handlungsweisen von Lernenden im Detail zu betrachten und zu analysieren. Andererseits können daraus Schlüsse für eine Strukturierung der vielfältigen Interpretationen und beobachteten Phäno-

mene beim Umgang mit Dezimalbrüchen gezogen werden, um deren Zusammenhänge und so den Kern des jeweiligen mathematisch nicht tragfähigen Begriffsgebrauchs aufdecken zu können.

Der theoretische Zugriff mit Festlegungen und Inferenzen

Der theoretische Zugriff der kognitiven Theorie der inferentiell gegliederten Begriffsbildungsprozesse ermöglicht es, die zu lernenden und die individuellen Konzepte hinsichtlich des Dezimalbruchverständnisses inferentiell nach den genutzten Argumenten zu gliedern und hilft somit individuelle Denk- und Handlungsmuster von Schülerinnen und Schülern genauer beschreiben und analysieren zu können. Begriffe werden dabei als Prädikate in Aussagen verstanden, auf die sich ein Individuum festlegt (vgl. Hußmann & Schacht 2015; Schindler 2014). Festlegungen sind Behauptungen, die in einer diskursiven Praxis vom Individuum expliziert und für wahr gehalten werden. Festlegungen können als Gründe dienen oder Konsequenzen beschreiben und sind in diesem Sinne inferentiell gegliedert (vgl. ebd.). Individuelle Festlegungen und Inferenzen können in der empirischen Analyse rekonstruiert werden, während sich mithilfe konventionaler Festlegungen und Inferenzen mathematische Gegenstandsbereiche, Begriffsnetze und prototypische Lernpfade aus normativer Sicht strukturieren lassen.

Normative Strukturierung des Lerngegenstands der Dezimalbrüche

Essentielle Grundlage für ein tragfähiges Dezimalbruchverständnis sind das dezimale Stellenwertverständnis im Bereich der natürlichen Zahlen sowie der Bezug zu den gemeinen Brüchen. Durch genaue Betrachtung der Gemeinsamkeiten und Unterschiede einerseits zwischen den Dezimalbrüchen und den natürlichen Zahlen und andererseits zwischen den Dezimalbrüchen und den gemeinen Brüchen konnten die zentralen Aspekte und Zusammenhänge des relevanten Lerngegenstandes der Dezimalbrüche aus normativer Sicht herausgearbeitet und inferentiell gegliedert werden. Diese Strukturierung des Lerngegenstandes galt für die nachfolgende empirische Analyse als Grundlage für die Untersuchung des Dezimalbruchverständnisses.

In der anschließenden empirischen Erhebung wurden u. a. die folgenden Forschungsfragen bearbeitet: (1) Inwiefern aktivieren Lernende Festlegungen beim Umgang mit Dezimalbrüchen und wie begründen sie diese und die jeweiligen Zusammenhänge durch situationsspezifische (individuelle) Festlegungsnetze? (2) Welche zentralen Phänomene und Interpretationen lassen sich beim Umgang mit Dezimalbrüchen beobachten?

Ergebnisse

Im Folgenden werden exemplarisch das Vorgehen sowie Ergebnisse der Studie dargestellt. Eine Grundlage zur Beantwortung der ersten Forschungsfrage ist ein diagnostisches Interview eines Schülerpaares einer achten Klasse zum Vergleich von Dezimalbrüchen. Dieses Interview wird tiefenanalytisch betrachtet, das heißt, dass individuelle Festlegungen und deren inferentielle Gliederung rekonstruiert und analysiert werden, wodurch die Begründungslogiken aufgezeigt werden können. Diese Rekonstruktion einer individuellen Begründungslogik zeigt beispielsweise, dass die Schülerin beim Vergleich zweier Dezimalbrüche, die eine unterschiedliche Anzahl an Nachkommastellen aufweisen, deren erste Nachkommastelle allerdings *verschieden* ist, die Zahl für größer hält, die weniger Nachkommastellen aufweist. Dies lässt darauf schließen, dass sie Festlegungen im Übergang von den natürlichen Zahlen zu den Dezimalbrüchen übergeneralisierend nutzt. Hinsichtlich der zugrundeliegenden Interpretation des Dezimalbruchs, ist es denkbar, dass ihre Festlegungen bezüglich der Auswirkung der Hinzunahme einer weiteren Stelle im Bereich der Eigenschaft der Zehnerbasis bei den Dezimalbrüchen mit denen bei natürlichen Zahlen inferentiell verknüpft sind. Diese Verknüpfung liegt für die Schülerin vermutlich darin, dass Dezimalbrüche *umgekehrt* aufgebaut sind wie natürliche Zahlen. Möglicherweise wird aus dem Zahlvergleich bei natürlichen Zahlen geschlossen, dass auch bei Dezimalbrüchen allein über die Anzahl der Stellen einer Zahl eine Aussage über die Größe derselben gemacht werden kann. Als Adaption ist der Dezimalbruch mit den meisten Nachkommastellen nun nicht der größte, sondern der kleinste.

Weitere Analysen der rekonstruierten individuellen Festlegungsnetze der beiden Fallbeispiele sowie ausgewählter Sequenzen 12 weiterer Lernender zeigen u. a. folgendes:

- Gerade für Lernende mit Schwierigkeiten im Bereich der Dezimalbrüche ist es herausfordernd, zu entscheiden, welche Festlegung oder welches Vorgehen für die jeweilige Situation aktiviert werden muss.
- Lernende halten an wenigen zentralen individuellen Festlegungen fest, die in der Vergangenheit vermutlich oftmals zum Erfolg geführt haben. Diese werden auch in neuen Situationen zur Problemlösung eingesetzt und es wird versucht, alle weiteren Aussagen damit zu stützen.
- Es zeigt sich die besondere Bedeutung der Grundvorstellung des Bruchs als Anteil sowie der Aspekte des Dezimalbruchverständnisses, deren Festlegungen im Übergang von den natürlichen Zahlen zu den Dezimal-

brüchen erweitert bzw. angepasst werden müssen (Teil-Ganzes-Konzept, Prinzip der fortgesetzten Bündelung, Eigenschaft der Zehnerbasis).

- Die Nutzung der elementaren Bruchvorstellungen, bspw. als Begründung für den stellenweisen Vergleich, sowie die flexible Interpretation der Bündelungseinheiten können als Hinweise für ein mathematisch tragfähiges Dezimalbruchverständnis identifiziert werden.

Ziel der Analyse der erhobenen diagnostischen Interviews hinsichtlich der Beantwortung der zweiten Forschungsfrage ist es, das Spektrum der vielfältigen Interpretationen von Dezimalbrüchen als Überblick darzustellen, diese zu kategorisieren sowie insbesondere Auswirkungen und Gründe dieser Interpretationen herauszuarbeiten. Dabei können insbesondere zahlreiche Übergeneralisierungen aus dem Bereich der natürlichen Zahlen beobachtet und darüber hinaus ein enger Zusammenhang zwischen fehlenden oder nicht aktivierten Verknüpfungen zu der Grundvorstellung des Bruchs als Anteil mit diesen Übergeneralisierungen konstatiert werden. Des Weiteren können konkret verschiedene Phänomene zusammenhängend als Konsequenzen zentraler Interpretationen von Dezimalbrüchen betrachtet werden. Dies hilft dabei, den Kern individueller nicht tragfähiger Denkweisen von Schülerinnen und Schülern zu verstehen, um somit mit möglichen Fördermaßnahmen auch dort und nicht bei Symptomen oder Folgeproblemen ansetzen zu können.

Literatur

- Heckmann, K. (2006). *Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern*. Berlin: Logos Verlag.
- Hußmann, S. & Schacht, F. (2015). Fachdidaktische Entwicklungsforschung in inferentieller Perspektive am Beispiel von Variable und Term. *Journal für Mathematikdidaktik*, 35(1), 105-134.
- Padberg, F. (2009). *Didaktik der Bruchrechnung*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Roche, A. & Clarke, D. (2004). When does successful comparison of decimals reflect conceptual understanding? In I. Putt, R. Faragher, & M. McLean (Eds.), *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010*. Vol. 2, 486-493. Townsville: MERGA.
- Schindler, M. (2014). *Auf dem Weg zum Begriff der negativen Zahl. Empirische Studie zur Ordnungsrelation für ganze Zahlen aus inferentieller Perspektive*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Steinle, V. & Stacey, K. (2004). A Longitudinal Study of Students' Understanding of Decimal Notation: An Overview and Refined Results. In I. Putt, R. Faragher, & M. McLean (Eds.): *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010*. V. 2, 541-548. Townsville: MERGA.