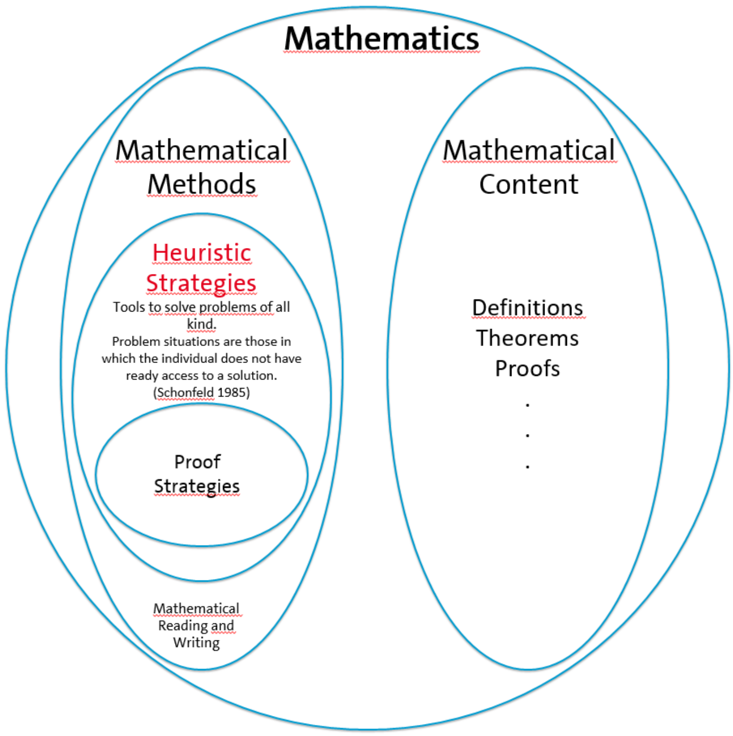
Peter STENDER, Universität Hamburg, DE

Ein Lehramtsspezifisches Tutorium zur Reduktion der doppelten Diskontinuität in der Lehrerbildung

Die doppelte Diskontinuität ist ein seit langem bekanntes ungelöstes Problem des Lehramtsstudiums. In einem Lehramtstutorium zur Linearen Algebra fokussieren wir auf Methoden der Mathematik ergänzend zu den Gegenständen der Vorlesung. Als Methoden zur Beweisfindung sind heuristische Strategien aus der Theorie zum Problemlösen bekannt. Im Tutorium werden Strategien in Beweisen aus der Vorlesung bewusst gemacht und deren Auftreten in der Schulmathematik aufgezeigt. Dies wird an Beispielen dargestellt.

Theoretischer Rahmen



Basierend auf der grundlegenden und umfassend akzeptierten Sichtweise aus der Wissenschaftstheorie, dass jede Fachwissenschaft neben einem spezifischen Gegenstandsbereich auch durch spezifische Methoden charakterisiert wird, wird in dem hier verwendeten Ansatz ein wichtiger Fokus auf die Methoden der Mathematik gelegt, da diese in Schule und Hochschule insbesondere in dem Aspekt der heuristischen Strategien identisch sind, während die mathematischen Inhalte nur geringe Schnittmengen enthalten.

Heuristische Strategien werden hier im Sinne von Dörner (1976) verstanden, als Verfahren, mit deren Hilfe Lösungen von Problemen gefunden werden können. Diese Definition bezieht sich auf Dörners Definition des Begriffs

Problem: „Ein Problem ist also gekennzeichnet durch drei Komponenten: 1. Unerwünschter Anfangszustand s_α; 2. Erwünschter Zielzustand s_ω; 3. Barriere, die die Transformation von s_α in s_ω im Moment verhindert.“ (Dörner 1976). Diese Definition führt zu einer sehr weiten Sichtweise des Begriffs *heuristische Strategie*, da sie sämtliche Handlungsstrategien umfasst, die dazu beitragen, Handlungsbarrieren zu überwinden. In diesem Sinne sind Beweisstrategien eine Teilmenge der heuristischen Strategien, da sie beim Entwickeln von Beweise genutzt werden können, die für das handelnde Subjekt neue sind. Mathematische Beweisstrategien beziehen sich in der hier verwendeten Sprechweise auf formalsprachliche Aspekte und meinen damit eher kleinteilige Ansätze wie geschicktes Substituieren, geschicktes addieren von Nullen etc. aber auch Strategien wie das Nutzen des Invarianzprinzips oder klassischer Beweisverfahren wie vollständiger Induktion oder Beweis durch Widersprich.

Basierend auf dem genannten weiten Begriff heuristischer Strategien wurde auch eine Liste von Strategien erstellt die kontrastierend zu den Beweisstrategien auch außerhalb von formaler Sprache nutzbar sind. Dies Liste basiert u. a. auf Pólya (1973), der in dem ursprünglichen Titel die heuristischen Strategien bereits den Methoden der Mathematik zuordnet: „How to solve it! A new aspect of mathematical method.“ In dieser Liste wurden einzelne Strategien unter Überschriften zusammengefasst, um die Übersichtlichkeit zu erhöhen.

- *Material organisieren*
  - Repräsentationswechsel nutzen,
  - Systematisches Probieren,
  - Simulationen nutzen, Diskretisieren;
- *Effektives Nutzen des Arbeitsgedächtnisses*
  - Superzeichenbildung,
  - Symmetrie,
  - Zerlege dein Problem in Teilprobleme;
- *Think Big*
  - Vergrößere den Suchraum,
  - Verallgemeinerungen;
- *Vorhandenes Nutzen*
  - Führe Neues auf Bekanntes zurück,
  - Analogien nutzen,
  - Superpositionsverfahren – kombiniere Teillösungen zur Gesamtlösung,
  - Probleme auf Algorithmen zurückführen;
- *Funktionales*
  - Betrachte Grenzfälle oder Spezialfälle,
  - Zum Optimieren muss man variieren;

- *Arbeitsorganisation*
    - Rückwärts arbeiten und Vorwärts arbeiten,
    - Dran bleiben und Aufhören - jeweils zum richtigen Zeitpunkt.

Es gilt gut als bestätigt, dass das selbständige Bilden von Superzeichen in Problemlöseprozessen ein deutlicher Hinweis auf hohe mathematische Begabung ist, ebenso wie flexible Repräsentationswechsel (z. B. Bauersfeld, 2001; Fuchs, 2006). Daher kann man folgern, dass diesen Strategien eine besondere Bedeutung im Rahmen der Mathematik zu kommen. Der Begriff *Superzeichen* (Kießwetter, 1988) stammt aus der Informationstheorie und meint „ein Zeichen, das für mehrere Zeichen steht“, also für eine Menge von Zeichen. Dörner (1976) bezeichnet das gleiche Konzept als *Komplexion*, die ursprüngliche Bezeichnung *Chunks* geht auf Miller (1956) zurück. Zentraler Gedanke dabei ist die effektive Nutzung des Arbeitsgedächtnisses durch sinnvolles Zusammenfassen mehrerer gedanklicher Objekte zu einem einzigen neuen Objekt. In der Mathematik treten Superzeichen vielfach auf in Form von Mengen, Äquivalenzklassen, Vektoren, Matrizen, Polynomen (unendliche Tupel), Funktionen (Mengen rechtseindeutiger Paare), Strukturen wie Gruppen, Ringen, Körpern etc.

Gestaltung des Tutoriums

Im Tutorium wurden Fragen zur Vorlesung beantwortet, selbst entwickelte Präsenzaufgaben bearbeitet, die einerseits Inhalte aus der Vorlesung illustrieren, andererseits Bezüge zur Schulmathematik aufzeigen, sowie heuristische Strategien thematisiert, die in den Inhalten der Vorlesung wirksam wurden. Bei letzterem wurden zu den jeweils thematisierten heuristischen Strategien passende Beispiele aus der Schulmathematik genannt. Daneben wurde in regelmäßigen Abständen Überblickswissen über die Vorlesungsinhalte vermittelt. Hier wird ein Beispiel zu den heuristischen Strategien vorgestellt.

Die heuristischen Strategien „Repräsentationswechsel nutzen“ und „Superzeichenbildung“ wurden in dem Tutorium besonders fokussiert, letztere beispielsweise bei Operationen auf Äquivalenzklassen.

In der Schule treten an zwei zentralen Stellen vergleichbare Schwierigkeiten auf: Funktionen sind Superzeichen, die zugrundeliegenden Elemente sind Wertepaare. Der Wechsel zwischen den Repräsentationen „Term, Tabelle, Graph, Situation“ ist für die Lernenden anspruchsvoll und die Bildung des Superzeichens *Funktion* aus den Wertepaaren / Wertetabellen gelingt vielen Lernenden nicht.

Brüche / rationale Zahlen sind in zweierlei Hinsicht Superzeichen (Paare von Zahlen bzw. Äquivalenzklassen von Paaren von Zahlen). Auch für die Entwicklung des Bruchkonzeptes sind zahlreiche Repräsentationen und die entsprechenden Wechsel zentral und für Lernende sehr anspruchsvoll.

Zur Verdeutlichung der Schulrelevanz wurde ergänzend die emotionale Situation von Lernenden betont, die sich mit solchen neuen Strukturen auseinandersetzen und die für die Studierenden vermutlich in Bezug auf den Umgang mit abstrakten Strukturen Ähnlichkeiten aufweisen zur Situation in der Schule in Bezug auf Funktionen und Brüche.

Evaluation

Es wurden fünf leitfadenbasierte Interviews mit Studierenden durchgeführt, die an fast allen Tutoriumssitzungen teilgenommen haben. Diese Interviews wurden auf Basis der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2010)ausgewertet.

Die Studierenden hatten die Beziehungen zur Schulmathematik gut erinnert und positiv bewertet. Visualisierungen und Repräsentationswechsel wurden als besonders hilfreich wahrgenommen. Die allgemeinen Inputs zu heuristischen Strategien wurden ebenfalls erinnert. Es stellte sich heraus, dass insgesamt die Erinnerung an die Inhalte aus dem Tutorium besonders gut waren, die auch als hilfreich (in der jeweiligen Situation) bewertet wurden.

Literatur

Dörner, D. (1976). *Problemlösen als Informationsverarbeitung* (1. Aufl.). Stuttgart: Kohlhammer.

Bauersfeld, H. (2001). Theorien zum Denken von Hochbegabten. *mathematica didactica*, 24(2), 3–20.

Fuchs, M. & Käpnick, F. (Hrsg.). (2008). *Mathematisch begabte Kinder: Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft*. Begabungsforschung. Berlin: LIT.

Kießwetter, K. (1988). Das Hamburger Fördermodell und sein mathematikdidaktisches Umfeld unter besonderer Berücksichtigung der Überlegungen und Modellierungselemente, welche Ausgangspunkte für die Konzeption waren. In K. Kießwetter (Hrsg.), *Das Hamburger Modell zur Identifizierung besonders befähigter Schüler* (S. 6–34). Hamburg: Selbstverlag.

Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken*. Beltz Pädagogik. Weinheim: Beltz.

Miller, G. A. (1956). The Magical Number Seven, Plus or Minus Two: Some Limits on our Capacity for Processing Infor-mation. *Psychological Review*, 63, 81–97.

Pólya, G. (1973). *How To Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton, N. J.: Princeton University Press.

Schurz, G. (2006). *Einführung in die Wissenschaftstheorie*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.