Gero STOFFELS, Universität Siegen, DE

Wahrscheinlichkeit und Empirie: Historische Beispiele, Schule und Hochschule

„Der leitende Gedanke des Verfassers war […], die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche noch unlängst für ganz eigenartig galten, natürlicherweise in die Reihe der allgemeinen Begriffsbildungen der modernen Mathematik einzuordnen.“ (Kolmogoroff, 1933, S. III)

Dieser Auszug aus Kolmogoroffs Vorwort seines Werkes „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ regt zwei Fragen an:

1. Was sind die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und wie werden diese in Kolmogoroffs Werk behandelt?
2. Was meint Kolmogoroff, wenn er davon spricht, dass die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung „noch unlängst für ganz eigenartig galten“? Hat sich diese Einschätzung mittlerweile geändert?

Die erste Frage ist zu umfangreich, um sie in diesem Rahmen zu besprechen. Eine Aufzählung der Grundbegriffe enthält u.a. *elementare Ereignisse, zufällige Ereignisse, Mengenkörper, Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, Wahrscheinlichkeitsfelder*.

Die zweite Frage wird in diesem Artikel ausführlicher behandelt. Kolmogoroffs Formulierung der Eigenartigkeit der Grundbegriffe erinnert an Czubers Formulierung aus seinem Bericht an die DMV:

„an der Schwelle der Wahrscheinlichkeitstheorie steht *eine Reihe von Begriffen, welche der Mathematik fremd sind* (Hervorh. d. Verf.), […]. Denn auf dem Boden jener Begriffe ruht das oberste Prinzip der Wahrscheinlichkeitsrechnung, das ist die Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs; von der Fassung jener Begriffe hängen aber auch die Grenzen des Anwendungsgebietes unserer in vielfacher Beziehung *merkwürdigen Theorie* (Hervorh. d. Verf.) ab.“ (Czuber, 1898, S. 1)

Die Fremdheit der Grundbegriffe von der Mathematik, im Sinne ihres empirischen Gehalts, stellt Kolmogoroff in seinen Ergänzungen zum Haupttext fest. In der Überschrift des ersten Paragraphs „§ 1. Axiome [2].“ (Kolmogoroff, 1933, S. 2) findet man einen Verweis auf eine Fußnote. Diese lautet: „[2] Ein Leser, der den folgenden Axiomen sofort einen konkreten Sinn geben will, soll sogleich den § 2 lesen“ (Kolmogoroff, 1933, S. 2). Folgt man dieser Leseempfehlung und beginnt mit „§ 2. Das Verhältnis zur Erfahrungswelt [1].“ (Kolmogoroff, 1933, S. 3) wird erneut auf eine Fußnote verwiesen. In dieser stellt Kolmogoroff klar:

„[1] Ein Leser, der sich nur für die rein mathematische Entwicklung der Theorie interessiert, braucht diesen Paragraphen nicht zu lesen – die weitere Darstellung beruht auf den Axiomen des § 1 und benutzt nicht die Überlegungen des gegenwärtigen Paragraphen. In diesem wollen wir uns mit dem bloßen Hinweis auf die empirische Entstehung der Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung begnügen und lassen deshalb eine eingehende philosophische Untersuchung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes in der Erfahrungswelt bewußt [sic!] beiseite. […]" (Kolmogoroff, 1933, S. 3)

Damit folgt Kolmogoroff, entsprechend seines Ziels einer formalen Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung, nicht der bis heute anhaltenden Tradition die Bedeutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs insbesondere hinsichtlich seiner Anwendbarkeit zu diskutieren (bspw. Czuber, 1898; Gigerenzer & Krüger, 1999; Laplace, 1814; von Mises, 1931; von Mises, 1928).

Das Verhältnis von mathematischer Theorie und Anwendung spielt für den Stochastikunterricht und somit auch für die mathematikdidaktische Forschung eine große Rolle. Biehler und Engel beschreiben im Rahmen ihrer „fachlich-epistemologische[n] Überlegungen" die klassische, frequentistische, objektivistische und subjektivistische Auffassungen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs (Biehler & Engel, 2015). Gleichzeitig stellen sie die Forderungen nach einer „konsequenten Datenorientierung" in der Stochastik dar, die sich auch in der Benennung der Leitidee „Daten und Zufall" in den Bildungsstandards der Sekundarstufe I und II niederschlägt (bspw. Bildungsstandards, 2003). Je nach Ausprägung einer konsequenten Datenorientierung des Stochastikunterrichts stellt sich die Frage, inwieweit die klassische und subjektivistische Auffassung vom Wahrscheinlichkeitsbegriff Anwendung finden kann. Steinbring und Schnell warnen vor der Dominanz einer Auffassung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Denn zum einen können „Wahrscheinlichkeitstheoretische Anwendungen […] nicht einfach nur unter pragmatischen Gesichtspunkten vorgenommen werden, sie erfordern die Berücksichtigung der Theorie selbst" (Steinbring, 1980, S. 438) und zum anderen bildet „dieses Phänomen [Zufall, *Anm. d. Verf.*] hinsichtlich der Ausdifferenzierungen der Zusammenspiele zwischen relativer Häufigkeit und theoretischer Wahrscheinlichkeit sowie Mustern und Variabilität die zentrale Grundlage für den Aufbau tragfähiger Vorstellungen zur Stochastik" (Schnell, 2014, S. 316).

Die bewusste Lösung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs vom empirischen Gehalt durch Kolmogoroff ist die Basis des modernen fachmathematischen Diskurses (Klenke, 2013). Das bedeutet, dass die Diskursteilnehmenden eine formal-abstrakte Auffassung von Wahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeitsrechnung vertreten oder abrufen können müssen. Auch dann, wenn einzelne Begriffe durch Anwendungsbeispiele motiviert werden. Ein Beispiel für eine solche formal-abstrakte Definition, die durch Anwendungsbeispiele motiviert wurde gibt Behrends (vgl. Abb.1). Auf die Definition folgt eine Erklärung, dass in jener „nur noch präzise definierte mathematische Begriffe" enthalten seien.

> Finale: Die Definition „Wahrscheinlichkeitsraum"
>
> Es fehlt eigentlich nur noch, alles zusammenzufassen. Die folgende wichtige Definition geht auf den russischen Mathematiker Kolmogoroff[8)] zurück:
>
> **Definition 1.2.3.** *Ein* Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ *besteht aus drei Dingen:*
>
> *(i) Einer nichtleeren Menge Ω, der Menge der Elementarereignisse.*
>
> *(ii) Einer σ-Algebra $\mathcal{E}$ auf Ω, der σ-Algebra der Ereignisse.*
>
> *(iii) Einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P} : \mathcal{E} \to [0,1]$.*
>
> Man beachte, dass diese Definition nur noch präzise definierte mathematische Begriffe enthält. Alles, was bei der Behandlung von Zufallsphänomenen nur vage ausgedrückt werden kann, wurde weggelassen.

Abb. 1: Die Definition „Wahrscheinlichkeitsraum (Behrends, 2013, S. 10)

In Schulbüchern kommt es zu verschiedenen Definitionen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, die mehr oder weniger den Empfehlungen von Biehler, Engels, Steinbring oder Schnell entsprechen. Die empirisch-gegenständliche Auffassung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes ist dominant. Erkennbar ist dies beispielsweise anhand der Definition aus dem Schulbuch Fokus Mathematik, die besagt: „Mit der **Wahrscheinlichkeit** eines Ausgangs wird die relative Häufigkeit bei vielen Wiederholungen des Experiments abgeschätzt." (Belthle, et al. 2014, S. 124). Im Lambacher Schweizer wird eine Definition entsprechend der Idee des Wahrscheinlichkeitsmaßes verwendet, deren Güte von der Passung zu auftretenden relativen Häufigkeiten und Symmetrien des Zufallsexperiments/-gerätes abhängt (vgl. Abb. 2). Diese Auffassung setzt sich in der Oberstufe im Zusammenhang von Häufigkeits- bzw. Wahrscheinlichkeitsverteilungen in denen theoretische und empirische Kenngrößen auftreten fort (vgl. Brandt, et al., 2015, S. 277).

> Bei einem Zufallsexperiment kann man die einzelnen Ergebnisse nicht vorhersagen, man kann ihnen aber **Wahrscheinlichkeiten** zuordnen, die zusammen 1 (100 %) ergeben müssen.
> Die Wahrscheinlichkeiten sind gut gewählt, wenn bei vielen Versuchsdurchführungen die relativen Häufigkeiten in der Nähe der Wahrscheinlichkeiten liegen und Symmetrien beachtet werden.

Abb. 2: Der Begriff „Wahrscheinlichkeiten" (Greulich, et al., 2015, S. 47)

Diesem Auffassungswechsel von einem empirisch-gegenständlichen zu einem formal-abstrakten Wahrscheinlichkeitsbegriff begegnen (Lehramts)Studierende beim Studium der Stochastik an der Hochschule. Wie in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung bietet dieser Übergang Irritationen und Reflexionsanlässe. Letztere werden unter anderem unter Zuhilfenahme der besprochenen Quellen identifiziert und für den Übergang von Lehramtsstudierenden des gymnasialen

Lehramts im Rahmen meines Projektes „ÜberPro_Wahrscheinlichkeitsrechnung“ nutzbar gemacht.

Literatur

Behrends, E. (2013). *Elementare Stochastik: Ein Lernbuch - von Studierenden mitentwickelt.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag.

Belthle, F., Hobrecht, S., Krysmalski, M., Leßmann, J., & Oselies, R. (2014). *Fokus Mathematik 7: Nordrhein-Westfahlen; Gymnasium;* Lehrerfassung (1. Aufl., 1. Dr). Berlin: Cornelsen.

Biehler, R., & Engel, J. (2015). *Stochastik: Leitidee Daten und Zufall*: Springer Berlin Heidelberg.

Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss Beschluss vom 4.12.2003 1, Kultusministerkonferenz 4.12.2003.

Brandt, D., Jörgens, T., Jürgensen-Engl, T., Riemer, W., Sonntag, R., & Spielmans, H. (2015). *Qualifikationsphase - Grundkurs/Leistungskurs: Schülerbuch* (1., Aufl.). Lambacher Schweizer - Ausgabe Nordrhein-Westfalen - Neubearbeitung. Stuttgart: Klett.

Czuber, E. (1898). Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*. Bericht. Leipzig.

Gigerenzer, G., & Krüger, C. (1999). *Das Reich des Zufalls: Wissen zwischen Wahrscheinlichkeiten, Häufigkeiten und Unschärfen.* Heidelberg: Spektrum, Akad. Verl.

Greulich, D., Jörgens, T., Jürgensen-Engl, T., Riemer, W., & Schmitt-Hartmann, R. (2015). *Lambacher Schweizer - Mathematik für Gymnasien 7: Nordrhein-Westfalen* (1. Aufl., [Dr.] 1). Stuttgart, Leipzig: Klett.

Klenke, A. (2013). Wahrscheinlichkeitstheorie (3. Aufl. 2013). *Springer-Lehrbuch Masterclass*. Berlin: Springer.

Kolmogoroff, A. N. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung: A. Kolmogoroff.* Berlin: J. Springer.

Laplace, S. S. de. (1814/1886). *Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit* (6th ed.). Leipzig: Duncker&Humblot.

Schnell, S. (2014). Muster und Variabilität erkunden: Konstruktionsprozesse kontextspezifischer Vorstellungen zum Phänomen Zufall. *Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts: Vol. 14*. Wiesbaden: Imprint: Springer Spektrum.

Steinbring, H. (1980). Zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs: D. Anwendungsproblem in d. Wahrscheinlichkeitstheorie aus didakt. Sicht. Materialien und Studien / Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld: Vol. 18. Bielefeld: Univ., Inst. für Didaktik d. Mathematik.

Von Mises, R. (1928). *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit: Richard von Mises.* Wien: J. Springer.

Von Mises, R. von. (1931). *Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandte Ma-thematik: Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und Theoretischen Physik*. Leipzig: Deuticke.