

Identifizierung von Phasen und Aktivitäten im Beweisprozess von Studienanfänger/innen

Argumentieren und Beweisen gilt als eine zentrale mathematische Kompetenz, welche spätestens zu Studienbeginn an Bedeutung gewinnt. Dabei ist für die Entwicklung der Beweiskompetenz die Unterscheidung zwischen Produkt und Prozess des Beweisens zentral. Während das Beweisprodukt ausschließlich deduktive Schlüsse umfasst, zeichnet sich der Beweisprozess gerade durch den Wechsel von induktiven und deduktiven Phasen aus (Reiss & Ufer 2009). In der vorzustellenden Studie sollen die kognitiven Vorgänge, die mit der Beweiskonstruktion verbunden sind, fokussiert und damit eine stärker prozessorientierte Perspektive auf die Beweiskompetenz eingenommen werden. Ziel ist es, ein Instrument zur Verfügung zu stellen, das es erlaubt, Beweisprozesse auf individueller Ebene zu beschreiben und hinsichtlich charakteristischer Vorgehensweisen zu analysieren. Hieraus können so dann Implikationen für die Theoriebildung sowie für die Gestaltung von Fördermaßnahmen abgeleitet werden.

Theoretische Beschreibung des Beweisprozesses

Meija-Ramos und Inglis (2009) beschreiben drei verschiedene Aktivitäten bei der Beweiskonstruktion, die sich insbesondere in ihrer Ausgangslage und ihrer Zielsetzung unterscheiden. Dabei ist anzunehmen, dass diese verschiedenen Aktivitäten auch unterschiedliche Verläufe der Beweiskonstruktion konstituieren. Existierende Modelle zum Beweisprozess stammen von Boero (1999) und Stein (1984). Beide Modelle fokussieren die Aktivität der Problemexploration, d.h. sie beschreiben einen Beweisprozess, dem ein offenes Problemfeld zugrundeliegt. Über das Formulieren einer Vermutung und das Identifizieren von Gründen für deren Gültigkeit wird hier neues mathematisches Wissen generiert. Dem gegenüber steht die gängige Übungspraxis zu Studienbeginn, bei der i.A. Aufgaben dominieren, die einen Beweis zu einer bereits formulierten Aussage fordern. Um die etablierten Modelle für die Beschreibung von Beweisprozessen von Studienanfänger/innen nutzbar zu machen, wurden einzelne Anpassungen entsprechend der Bedingungen im Studienalltag vorgenommen. Das modifizierte Modell zeichnet sich somit insbesondere dadurch aus, dass es eine zu verifizierende Aussage an den Anfang der Beweiskonstruktion stellt. Wenngleich diese Aussage inhaltlich wie strukturell einer Vermutung ähnelt, so nimmt sie dennoch eine andere Funktion im Beweisprozess ein. Während die Vermutung die Erkenntnisse der Exploration bündelt, muss die Aussage erst durchdrungen und mit Vorwissen in Verbindung gebracht werden. Entsprechend wird die explorative

Phase, wie sie bei Boero (1999) und Stein (1984) auftritt, in dem modifizierten Modell nicht ausgeklammert, sondern an den Beginn des Bearbeitungsprozesses gestellt. Angelehnt an das Konzept des Situationsmodells nach Reusser (1997) wird die Entwicklung einer individuellen mentalen Aufgaben-Repräsentation als Ergebnis der Exploration angenommen, die den weiteren Beweisprozess maßgeblich beeinflusst. Diese umfasst als Verständnis-ebene die zentralen Informationen aus der Aufgabenstellung sowie bereits aktiviertes konzeptuelles und strategisches Vorwissen. Ausgehend von der

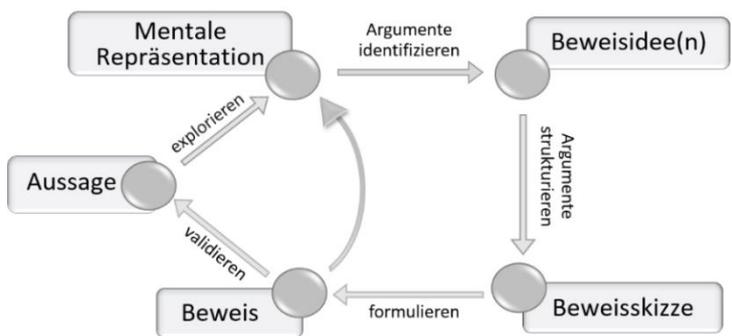


Abb. 1: Modifiziertes Beweisprozessmodell, Boero (1999) und Stein (1984)

mentalen Repräsentation wird ein zu den etablierten Modellen analoger Verlauf des Beweisprozesses angenommen. So werden zunächst Gründe für die Gültigkeit der Aussage erschlossen, diese sodann deduktiv aufgearbeitet und geordnet, um sie schließlich zu

einem Beweis zusammen zu führen, der den Standards der Diskursgemeinschaft genügt. Abschließend gilt es, den formulierten Beweis auf inhaltlicher, sprachlicher und formaler Ebene zu überprüfen und ggf. nach alternativen, eleganteren oder kürzeren Beweisen zu suchen. Diese letzte Phase des Validierens wird bei Boero (1999) und Stein (1984) bereits angedeutet und ihre Existenz durch die Arbeiten von Misfeldt (2013) gestützt.

Forschungsfragen und Methodik

Die theoretischen Vorüberlegungen zielen darauf ab, ein prozessorientiertes Modell für die Beweiskonstruktion zu entwickeln, mit dessen Hilfe sich Beweisprozesse auf individueller Ebene beschreiben und analysieren lassen. Vor diesem Hintergrund gilt es festzustellen, inwieweit sich die theoretisch abgeleiteten Phasen im Beweisprozess von Studienanfänger/innen empirisch rekonstruieren lassen. Hierbei steht insbesondere die explorative Phase zu Beginn des Beweisprozesses im Mittelpunkt des Forschungsinteresses, deren Existenz und Eigenständigkeit noch zu belegen sind. Für die empirische Überprüfung des Prozessmodells wurde eine explorative Laborstudie konzipiert, im Rahmen derer Beweisprozesse von Studienanfänger/innen initiiert, beobachtet und anschließend im Hinblick auf die auftretenden Phasen analysiert werden. Im Fokus der Studie stehen Studierende der Mathematik und solche des gymnasialen Lehramts, die sich im ersten Studienjahr befinden bzw. dieses soeben abgeschlossen haben. Sie werden gebeten, verschiedene

Beweisaufgaben aus dem Bereich der Analysis I zu bearbeiten und gemeinsam eine Lösung zu formulieren. Die Bearbeitung findet dabei in Paaren statt, sodass ein Austausch über unterschiedliche Herangehensweisen und Beweisideen angeregt wird. Der Bearbeitungsprozess wird videographiert, das audio-visuelle Datenmaterial transkribiert und die Interviews schließlich entsprechend der Qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2007) analysiert. Dabei wird das Transkript gemäß der Analysetechnik der formalen Strukturierung von zwei unabhängigen Kodierern unter deduktiver Kategorienanwendung in Abschnitte gegliedert. Als Kategorien und damit als strukturierende Kriterien dienen die einzelnen Tätigkeiten im Prozessmodell (s. Abb. 1), sodass die Struktur des Bearbeitungsprozesses in Form von Phasenabläufen beschrieben werden kann.

Ergebnisse

Die Studie befindet sich zurzeit in der Durchführung. Erste Ergebnisse von Interviews mit 12 Studierenden zeigen bereits, dass die angenommenen Kategorien greifen und der Kodierleitfaden eine objektive Prozessanalyse ermöglicht. Die Interrater-Reliabilität ist mit Werten für Cohens Kappa von .68 und höher zufriedenstellend. Mit dem oben dargestellten Beweisprozessmodell scheint somit ein Beschreibungsinstrument zur Verfügung zu stehen, das zumindest in den untersuchten Fällen gut geeignet ist, um den Beweisprozess der beobachteten Studierenden ganzheitlich zu beschreiben. Dass dies nicht selbstverständlich ist, zeigen solche Fälle, in denen Studierende einzelne Phasen kaum berücksichtigen. Dies trifft insbesondere auf die Phase des Formulierens zu, welche zugunsten einer schnellen, teilweise fragmentarischen Aufgabenlösung in einzelnen Fällen nahezu vollständig ausgelassen wird. Die zyklische Struktur des Modells spiegelt sich insofern in den empirischen Daten wieder, als viele Wechsel zwischen den einzelnen Phasen stattfinden. Insbesondere die Phase des Validierens, verstanden als das Hinterfragen im Prozess geäußerter Überlegungen, erscheint hier als eine Tätigkeit, die fortlaufend und parallel zu den übrigen Teilprozessen stattfindet. Das Überprüfen oder Optimieren eines bereits formulierten Beweises konnte hingegen nur in Einzelfällen beobachtet werden. In Hinblick auf die explorative Phase konnten in jedem der analysierten Transkripte Stellen identifiziert werden, die dem Verstehen der gegebenen Aussage bzw. dem Aufbau einer individuellen Vorstellung dienen. Die Annahme einer eigenständigen Explorationsphase zu Beginn des Bearbeitungsprozesses erscheint somit auch unter empirischen Gesichtspunkten sinnvoll. Die Ausgestaltung dieser Phase variiert jedoch auf qualitativer sowie quantitativer Ebene. Während einige Studierende zu Beginn des Beweisprozesses viel Zeit in das Anfertigen von Skizzen und das Nachschlagen von Begriffen investieren, beginnen

andere den Bearbeitungsprozess nach einem kurzen Blick auf die Aufgabenstellung mit der Suche nach geeigneten Argumenten. Hier fungiert die zur Verfügung gestellte Fachliteratur als eine Sammlung potentiell anwendbarer Argumente, die im Verlauf des Beweisprozesses sukzessive auf ihre Nützlichkeit hin untersucht werden. Vor dem Hintergrund derartiger Beobachtungen lassen sich weitere Forschungsfragen ableiten, die den Einfluss der explorativen Phase auf den Bearbeitungserfolg sowie die damit verbundenen Beweisstrategien untersuchen und einer stärker induktiv orientierten Analyse bedürfen.

Diskussion und Ausblick

Die vorgestellte Studie konzentriert sich zunächst darauf, die theoretisch abgeleiteten Phasen in realen Beweisprozessen zu rekonstruieren und so empirische Evidenz für das beschriebene Beweisprozessmodell zu liefern. Dieses Modell kann sodann als Beschreibungsinstrument für individuelle Beweis-konstruktionen dienen und auf diese Weise zum einen die Theoriebildung und zum anderen die Entwicklung von Fördermaßnahmen unterstützen. So sollen im weiteren Verlauf des Projekts die einzelnen Phasen bzgl. ihrer Spezifika weiter ausdifferenziert sowie verschiedene Beweistypen identifiziert werden. Über die Bewertung der formulierten Beweise lassen sich darüber hinaus erfolgreiche und weniger erfolgreiche Studierende unterscheiden, über deren Vergleich erfolgsversprechende Beweisstrategien und Beweisprozessverläufe herausgestellt werden können.

Literatur

- Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof. A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. In *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof* (7/8).
- Mayring, P. (2007). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken*. Weinheim: Beltz.
- Mejia-Ramos, J. P. & Inglis, M. (2009). Argumentative and proving activities in mathematics education research. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, M. de Villers (Eds.): *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference. Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 88-93). Taipei, Taiwan.
- Misfeldt, M. (2013). Mathematical Writing. In: <http://www.misfeldt.info/wp-content/uploads/2013/01/mathematical-writing.pdf> (letzter Zugriff am 26.02.2015).
- Reiss, K. & Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus? Empirische Ergebnisse zum Argumentieren, Begründen und Beweisen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV)*, 111 (4), 155-177.
- Reusser, K. (1997). Erwerb mathematischer Kompetenzen. In F. Weinter & A. Helmke (Hrsg.): *Entwicklung im Grundschulalter* (S. 141-155). Weinheim: Beltz.
- Stein, M. (1984). *Beweisen*. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.