Stefan RITTER, Mikko VASKO, Hochschule für Technik und Wirtschaft Karlsruhe, DE

Beispiele für Verständnisaufgaben zur Ingenieurmathematik in digitaler Form

1. Einführung

In den Einführungsvorlesungen für Mathematik in Ingenieurstudiengängen steht man vor der Herausforderung inhomogener Vorkenntnisse der Studierenden. Oft fehlt es an Kenntnissen und Fähigkeiten im Bereich des Mittelstufenstoffs, die auf mangelnde Übung und fehlendes Grundverständnis zurückzuführen sind. In den Anfängervorlesungen müssen sowohl die grundlegenden Rechenfertigkeiten geübt werden als auch das mathematische Verständnis vermittelt werden. Hierfür stehen heutzutage neben der Vorlesung auch digitale Übungsaufgaben zur Verfügung. Individuelle Übungsaufgaben, die auf Rechenfertigkeit ausgerichtet sind, können in Online-Systemen einfach implementiert werden (siehe z.B. Sangwin 2013; Schramm 2004). Häufig verwenden die Studierenden Hilfsmittel, die zur richtigen Lösung führen, ohne dass der Stoff wirklich verstanden wurde.

Der Vortrag zielt auf die Entwicklung digitaler Übungsaufgaben, die das Verständnis fördern und nicht durch einfaches „Durchrechnen“ zu lösen sind. Wir präsentieren vier typische Beispiele aus den Anfängervorlesungen „Höhere Mathematik 1-3“ für Ingenieure der Elektro- und Informationstechnik, die diesen Aspekt fokussieren. Um solche Aufgaben automatisch auszuwerten, ist ein Online-System mit Verbindung zu einem Computer Algebra System (CAS) notwendig. Solche Aufgaben können einfach im System „STACK“, das an das CAS Maxima angebunden ist, umgesetzt werden. Die Aufgaben können zudem parametrisiert werden, so dass jeder Studierende eine unterschiedliche Aufgabe bekommt.

Im Rahmen der Mathematikausbildung von Ingenieuren der Elektro- und Informationstechnik werden an der Hochschule Karlsruhe seit mehreren Semestern Online-Übungsaufgaben vorlesungsbegleitend angeboten.

2. Online-Übungsaufgaben, die sich nicht „schematisch“ lösen lassen

Im ersten Semester werden normalerweise die **komplexen Zahlen** behandelt. Die Studierenden lernen den Umgang mit komplexer Arithmetik und kommen damit meist recht gut zurecht. Die folgende Aufgabe, die von I. Rogina stammt, bereitet aber vielen Studierenden Schwierigkeiten:

Geben Sie eine komplexe Zahl z, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

$|z| = 3$ und $z \neq \bar{z}$.

$z =$

Die Studierenden müssen jetzt nicht ein Schema „durchrechnen“, sondern sich erst ein Bild von der Situation machen. Es gibt nicht „die Lösung“ sondern viele Lösungsmöglichkeiten.

Mit dem System „STACK“ kann getestet werden, ob die vom Studierenden eingegebene komplexe Zahl die beiden Bedingungen erfüllt, und somit die Antwort auf Richtigkeit überprüft werden. Darüber hinaus können typische Fehler, die auf bekannten Fehlkonzepten beruhen und häufig gemacht werden, mit dem System abgefangen werden. Kommentare zu seinem Lösungsvorschlag helfen dem Studierenden weiter. Gibt man beispielsweise die Antwort „3*i+3“ ein, so erfolgt der Hinweis:

Die Antwort ist leider falsch.

Bitte beachten Sie, dass der Betrag $|3\,\mathrm{i} + 3| = 3\sqrt{2}$.

Der Hinweis motiviert den Studierenden, die eigene Lösung zu verbessern.

Ein zentraler Begriff der **Vektorrechnung** ist die lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit. Bei folgender Aufgabe muss man nicht nur rechnen, sondern es ist eine Vorüberlegung notwendig, man muss sich die Defintion nochmals genau vor Augen führen:

Gegeben sind die Vektoren

$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$

Geben Sie einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor $\vec{x}_1$ ein, so dass die Vektoren $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2$ und $\vec{x}_1$ linear abhängig sind, und $\vec{x}_1 \neq \vec{a}_1$ und $\vec{x}_1 \neq \vec{a}_2$.

$\vec{x}_1 =$

Geben Sie einen Vektor $\vec{x}_2$ ein, so dass die Vektoren $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2$ und $\vec{x}_2$ linear unabhängig sind.

$\vec{x}_2 =$

Um den Effekt dieser Aufgabe zu stärken, könnte nach mehreren unterschiedlichen Vektoren gefragt werden (siehe Sangwin 2003, 824). Dann müssten die Studierenden auch noch überlegen, welche Teile der Antwort veränderbar sind.

In der **linearen Algebra**, die normalerweise im zweiten Semester behandelt wird, betrachtet man das **Eigenwertproblem** für eine quadratische Matrix. Bei einer gegeben Matrix lassen sich die Eigenwerte als Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmen. Das geht auch „per Knopfdruck" in Maple®, in Matlab® oder in Wolfram Alpha®. Bei folgender, quasi umgekehrter Aufgabenstellung, muss man sich zumindest die Definition vergegenwärtigen und etwas elementare Mittelstufenmathematik abrufen:

Bestimmen Sie die Parameter a und b so, dass 2 und -3 Eigenwerte der Matrix M sind.

$$M = \begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie α so, dass bei der Differenzialgleichung

$$y''(t) + 2y'(t) + \alpha \cdot y(t) = t^2 + 3$$

der aperiodische Grenzfall Vorliegt.

$\alpha =$

Bestimmen Sie für dieses α (irgend)eine Lösung der Differenzialgleichung.

$y(t) =$

Im zweiten oder dritten Semester werden **gewöhnliche Differenzialgleichungen** behandelt. Auch hier wird gerne auf „Kochrezepte" zur Lösung der gängigen Klausuraufgaben zurückgegriffen. Deshalb drehen wir die Aufgabenstellung wieder um:

Hier können der Vorfaktor der ersten Ableitung und der konstante Term auf der rechten Seite randomisiert werden, so dass jeder Studierende eine ähnliche, aber nicht die gleiche, Aufgabe bekommt.

Im Teil 2 der Aufgabe, darf der Bearbeiter irgendeine Lösung anbieten. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass nicht nur die allgemeine Lösung sondern auch die partikuläre Lösung, die man schnell über einen Störansatz erhält, zur korrekten Beantwortung der Frage ausreicht. Wer in der Vorlesung aufgepasst hat, spart hier Zeit. Die meisten Studierenden berechnen zunächst die Lösung der homogenen Differenzialgleichung und addieren dann eine partikuläre Lösung, weil dies dem gängigen Schema entspricht. „STACK" akzeptiert beide Lösungen.

3. Fazit

Die vorgestellten Aufgaben können in zwei Kategorien typisiert werden. Bei den ersten beiden Aufgaben müssen die Studierenden eine Lösung entwickeln. Es werden Bedingungen vorgegeben, die im Lösungsprozess zu beachten sind, die jedoch Freiräume in der Lösungsfindung lassen. Die Lösungsvorschläge werden im System „STACK“ geprüft und der Studierende erhält eine Rückmeldung, etwa ein Feedback über eine nicht eingehaltene Bedingung.

Beim dritten und vierten Beispiel wird eine klassische Aufgabenstellung invertiert. Obwohl für die Aufgaben eine (eindeutige) Lösung existiert, fordert die ungewöhnliche Aufgabenstellung zum Nachdenken auf. Ein reflexartig abgerufenes Kochrezept führt hier nicht zum Ziel.

Das Ziel der Aufgaben ist, die Studierenden zum Nachdenken über die zugrundeliegende Mathematik anzuregen. Das Abspulen von Rechenvorschriften steht nicht im Vordergrund.

Die Umsetzung der Aufgaben in „STACK“ ist meistens einfach – die Herausforderung liegt eher in der Entwicklung der Idee für die Aufgabe. Hier muss sich auch der Lehrende aus dem gewöhnlichen Denkmuster für das Stellen von Übungsaufgaben lösen.

Literatur

Rasila, A., Malinen, J., Tiitu, H. (2015). On automatic assessment and conceptual understanding. *Teaching Mathematics Applications,* 34 (3): 149-159.

Sangwin, C. J. (2003). New opportunities for encouraging higher level mathematical learning by creative use of emerging computer aided assessment. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 34 (6): 813-829.

Sangwin, C. J. (2013). *Computer Aided Assessment of Mathematics.* Oxford: Oxford University Press.

Schramm, T. (2004). CATS: Ein Computer Algebra Training System: Mathematisches Assessment mit MapleTA™. *Global Journal of Engineering Education*, 8 (3): 327-330.