Ralf KRÖMER, Bergische Universität Wuppertal, Hans-Niels JAHNKE, Universität Duisburg-Essen, DE

Rechtfertigen in der Mathematik

1. „Praktische Vernunft“ im Sinne Felix Kleins und „Rechtfertigen“

Felix Klein hielt 1911 seine letzte Anfängervorlesung über Analysis, speziell auf das Lehramtsstudium zugeschnitten. Klein diskutiert am Beispiel $1 = 0,\overline{9}$, wie der „moderne Mathematiker“ mit Axiomen umgeht:

„Der moderne Mathematiker: mein Geschäft ist, aus Obersätzen, die ich Axiome nenne, zu deduzieren, nicht diese Axiome zu begründen. Ich wähle die Axiome so, dass ich praktisch etwas damit anfangen kann. Verabredung! [...] Die Sicherheit der Mathematik ruht in der Ableitung ihrer Sätze aus den Axiomen. Die Sicherheit der Axiome ist eine ganz andere Frage; sie ist wesentlich eine Frage der praktischen Vernunft. [Das ist also ein ganz anderer Standpunkt als der populäre, demzufolge die Axiome Sätze sind, die von selbst einleuchten]“ (Klein 1911, Blatt 14)

Rephrasieren und interpretieren wir diese Äußerung: Sicher an der Mathematik sind die Deduktionen, also das, was man *Beweise* nennt. Nicht im selben Maße sicher sind die Axiome. Ihre Sicherheit „ist eine ganz andere Frage“ – und zwar eine Frage der *praktischen Vernunft*. Aus dem Kontext ist klar, dass hier nicht praktische Vernunft im präzisen Sinne Kants gemeint ist, sondern eher die „Fähigkeit zur Beurteilung einer Situation unter Einbeziehung aller relevanten Gesichtspunkte in praktischer Absicht“. Die klassische Auffassung, dass Axiome aufgrund ihrer Evidenz gewählt werden, tut Klein als „populären Standpunkt“ ab und betont, dass seine Auffassung ein „ganz anderer Standpunkt“ sei. Die *Evidenzkonzeption mathematischer Wahrheit wird damit in Frage gestellt und negiert.*

Nach unserer Auffassung ist diese *Evidenzkonzeption auch für den schulischen Mathematikunterricht nicht förderlich* und sollte durch eine breitere und aspektreichere Konzeption abgelöst werden, die durch Kleins Begriff der „praktischen Vernunft“ angedeutet wird. Die Evidenzkonzeption scheint uns zu eng, weil der Appell an Evidenz weiteres Sprechen und Argumentieren abschneidet. Das wird häufig den vielfältigen Ideen und Assoziationen, die die SuS zu einem Sachverhalt haben können, nicht gerecht. Argumente, die an Evidenz appellieren, sollen nicht ausgeschlossen sein, es soll aber Platz geschaffen werden, um auch andere Gründe, die für die Akzeptanz eines Axioms oder einer Definition sprechen, thematisieren zu können.

Während es mit „Beweisen“ einen Begriff für die Entwicklung deduktiver Argumentationen in der Mathematik gibt, fehlt ein konsentierter Begriff für die Entwicklung und Bewertung von Gründen, die aus praktischer Vernunft i.S. Kleins fließen und die zur Annahme oder Ablehnung von Axiomen und

Definitionen führen. Wir schlagen hierfür „Rechtfertigen“ vor. Beide Begriffe können trennscharf benutzt werden, weil Axiome nicht bewiesen werden und es für ein Theorem nicht ausreicht, „nur“ gerechtfertigt zu werden.

Der Begriff „Rechtfertigen“ ist u.E. unerlässlich für ein angemessenes Sprechens über Mathematik und sollte daher auch im schulischen Mathematikunterricht eine Rolle spielen. Dasselbe gilt auch für die klassischen Begriffe: Beweis, Definition, Hypothese, Axiom u.a. Diese sind zentrale Bestandteile jeder Wissenschaftspropädeutik; ohne sie kann über Wahrheit, Gültigkeit, Plausibilität, Zweifel nicht gesprochen werden. Mathematik als von Menschen produziertes Wissen bleibt im Dunkeln, wenn man ihre Begriffssprache zunehmend zugunsten vager Sprechweisen ausklammert bzw. einebnet.

In der Philosophie der Mathematik scheint sich Penelope Maddy als einzige intensiv mit Rechtfertigung von Axiomen befasst zu haben. Im Kontext der Axiomatik der Mengenlehre führt Maddy die auch für uns nützliche Sprechweise von intrinsischen und extrinsischen Rechtfertigungen ein:

"[…] the axioms of ZFC follow directly from the concept of set, […] they are somehow ‘intrinsic’ to it (obvious, self-evident), while other axiom candidates are only supported by weaker, ‘extrinsic’ (pragmatic, heuristic) justifications, stated in terms of their consequences, or intertheoretic connections, or explanatory power, for example." (Maddy 1988 p.482f)

Intrinsisch gerechtfertigt werden nach Maddy grundlegende mengentheoretische Konstruktionen, z.B. Paarmengenbildung (ibid. p.758f), extrinsisch dann z.B. das Auswahlaxiom (s.u.). Genau auf solche Leistungen wie die oben genannten stützt sich praktische Vernunft im Sinne Kleins. Für Maddy ist der extrinsische Typus nicht etwa schwächer, sondern sogar wichtiger. Uns interessiert er, weil der intrinsische der Evidenzkonzeption sehr nahekommt (wenn auch die Verhältnisse insgesamt etwas komplizierter sind, wie wir gleich an historischen Beispielen sehen werden).

2. Historische Beispiele aus Antike und Moderne

Der Euklidkommentar des Proklos (412-484) enthält verschiedene Theorien zur Unterscheidung Axiom/Postulat, darunter auch die des Geminos, für den Axiome durch direkte Einsicht gerechtfertigt sind (Evidenzkonzeption). Proklos berichtet allerdings von Widerspruch gegen manche Evidenzbehauptungen bzw. legt selbst solchen ein). Postulate hingegen behaupten die Möglichkeit von Konstruktionen; ihre Evidenz wird indirekt durch Bewegungsargumente („Fließen von Punkten“) gerechtfertigt. In Maddys Sprechweise sind beides unterschiedliche Typen von „intrinsic justifications“. Proklos macht einen scharfen Unterschied zwischen den ersten drei Postulaten, die konstruktiv sind, so dass der Begriff der Evidenz noch an eine Handlung gebunden ist, und den beiden Postulaten 4 und 5, die aus diesem Schema herausfallen, also entweder unmittelbar eingesehen werden müssen (und demnach als "Axiome" zu bezeichnen wären) oder als Lehrsätze zu behandeln sind. In gängigen Geschichten der nichteuklidischen Geometrie wird darüber hinweggegangen, dass Proklos sich für letzteres entscheidet – und die Postulate 4 und 5 in gleicher Weise behandelt.

Archimedes hat laut Proklos die Unterscheidung ganz aufgegeben und alle Aussagen, die an den Anfang gestellt werden, als Postulate bezeichnet. Diese werden bei ihm auch dadurch gerechtfertigt, dass er auf die (s. E. wahren) Sätze hinweist, die aus ihnen abgeleitet werden können (v. Fritz 1955). In der Diskussion des archimedischen Axioms zu Beginn der Schrift über die Quadratur der Parabel macht Archimedes eine Abstufung im Grad der Zweifelsfreiheit von Sätzen und sieht die Benutzung seines Axioms durch die Zweifelsfreiheit der mit ihm bewiesenen Sätze gerechtfertigt. In Maddys Terminologie ist dies eine „extrinsic justification“.

Rechtfertigung spielt auch in den Debatten um die Grundlagen der Mathematik im 20. Jhdt. eine Rolle; zu nennen wären die Antinomien der Mengenlehre (die zum Axiomensystem von Zermelo-Fraenkel führen, das aber mit Gödel als ad-hoc-Bereinigung erkennbar wird), die Diskussion über das Auswahlaxiom, der Intuitionismus und die Suche nach neuen Axiomen der Mengenlehre, motiviert durch das Resultat der Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese sowie die Entwicklung der Kategorientheorie ab 1945 (Krömer 2007). Z.B. macht Zermelo zum Auswahlaxiom folgende Bemerkung, worin er klar zwischen intrinsischer und extrinsischer Rechtfertigung unterscheidet – und die extrinsische letztlich für objektiver hält:

„Mag [dessen] *Evidenz* auch bis zu einem gewissen Grade subjektiv sein, so ist sie doch jedenfalls eine notwendige Quelle mathematischer Prinzipien, wenn auch kein Gegenstand mathematischer Beweise [...]. Was sich aber objektiv entscheiden lässt, die Frage nach dem *wissenschaftlichen Bedürfnis*, möchte ich hier in der Weise der Beurteilung unterbreiten, daß ich eine Reihe von elementaren und grundlegenden Sätzen und Problemen vorlege, welche meines Erachtens ohne das Auswahlprinzip überhaupt nicht erledigt werden können“ (Zermelo 1908, S.113, seine Hervorhebung)

3. Didaktische Schlussfolgerungen und Beispiele

Welche Relevanz hat dieser Befund nun für den Mathematikunterricht? Unseres Erachtens sollte irgendwann im Laufe der Schulzeit der Begriff des Argumentierens ausdifferenziert werden, so dass SuS eine Bewusstheit für Bedeutung und Grenzen deduktiver Argumentationen (= Beweise) entwickeln können. Man versteht deduktives Argumentieren besser, wenn man auch das nichtdeduktive Argumentieren versteht (Jahnke 2009, Abschnitt 4).

Uns geht es hierbei nicht um ausgefeilte Beweistechniken oder formale Virtuosität, sondern um ein fundiertes inhaltliches Verständnis der Rolle des Beweisens in der Mathematik. Rechtfertigen soll einen Platz neben dem Beweisen haben. Sonst besteht die Fiktion der notwendigen Mathematik.

Eine der vielen Chancen, Rechtfertigung in der Schule zu thematisieren, bietet das von Klein angeführte Beispiel $1 = 0,\overline{9}$. Danckwerts und Vogel (2006) sprechen von einer "Frage mit Tiefgang" und führen schulmathematische „Beweise" der Aussage unter Verwendung des Archimedischen Axioms. Empirische Studien (Bauer 2011, Wille 2017) zeigen, dass manche SuS und Studierende selbst dann noch an der Aussage zweifeln, wenn solche „Beweise" geführt werden. Wir plädieren dafür, den Konventionscharakter der Aussage hervorzuheben und sie i. S. praktischer Vernunft zu bewerten. Weitere Gelegenheiten in anderen Kontexten und Klassenstufen benennen wir nur stichwortartig: Wieso gibt Minus mal Minus Plus? Haben Punkte Ausdehnung? Wie definiert man den Abstand zweier nicht punktförmiger Objekte (was ist z.B. die Entfernung von Essen und Berlin)? Gibt es genau eine Verbindungsstrecke zweier Punkte? Ist das Quadrat ein Rechteck?

Literatur

Archimedes (1967). *Werke. Übersetzt und mit Anmerkungen versehen von A. Czwalina. 2. reprogr. Auflage* Darmstadt.

Bauer, L. (2011). Mathematik, Intuition, Formalisierung: eine Untersuchung von Schülerinnen- und Schülervorstellungen zu $0,\overline{9}$, *Journal für Math.-Did.* 32: 79–102.

Danckwerts, R.; Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten.* München u. a.: Spektrum Akademischer Verlag, 2006.

Fritz, K. v. (1955). Die ARCHAI in der griechischen Mathematik. *Archiv für Begriffsgeschichte*, *1*, 13-103.

Jahnke, H. N. (2009). The Conjoint Origin of Proof and Theoretical Physics. In G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics. Philosophical and Educational Perspectives* (pp. 17-32). New York et al: Springer

Klein, F. (1911): *Einleitung in die Differential- und Integralrechnung*, Vorlesung im Sommersemester 1911, SUB Göttingen, Nachlass Felix Klein, Cod. Ms. F. Klein 21 E

Krömer, R. (2007). *Tool and object. A history and philosophy of category theory*. Basel: Birkhäuser.

Maddy, P. (1988). Believing the axioms I & II, *Journal for Symbolic Logic* 53(2), 481-511, 736-764.

Wille, A. (2017). „Und irgendwann im Unendlichen triffst du die 1" – Studierendenvorstellungen zu $0,\overline{9}$. Erscheint in *Beiträge zum Mathematikunterricht*.

Zermelo, E. (1908). Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung. *Math. Ann*. 65, 107-128.