

## MatInEE: Konzept zur Fehleranalyse und -typisierung in einer Erstsemesterklausur zur Linearen Algebra eines ingenieurwissenschaftlichen Bachelorstudiengangs

In den Mathematik Klausuren der ingenieurwissenschaftlichen Bachelorstudiengänge zeigen sich häufig eklatante Defizite in den mathematischen Kalkülfertigkeiten. Die Erkenntnisse einer Fehleranalyse können zukünftig in Vorkurse einfließen oder zu einer Nachjustierung in den semesterbegleitenden Lernangeboten führen. Betrachtet werden dazu 306 Erstsemesterklausuren im Fach Mathematik aus dem WS 13/14 für Ingenieure D1.

### 1. Musterlösung aufschlüsseln in Lösungsschritte

Exemplarisch soll die Vorgehensweise an der folgenden - gekürzten - Aufgabe 2 aus der Klausur (Rathmann, 2013) dargelegt werden.

Aufgabe 2  
Gegeben sei die Matrix  $A := \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ .  
a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A ....

Abb. 1: Ausschnitt der Aufgabe 2 aus der Klausur

Eine Musterlösung könnte wie folgt aussehen (siehe Abb. 2).

$$\det(A - \lambda \cdot \mathbb{E}) = 0 \quad (2a-1, U)$$
$$\begin{aligned} (A - \lambda \cdot \mathbb{E}) &= \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 - \lambda & -3 \\ 5 & -4 - \lambda \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2a-2, U)$$
$$\det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & -3 \\ 5 & -4 - \lambda \end{pmatrix} = (4 - \lambda)(-4 - \lambda) - 5 \cdot (-3) \quad (2a-3, U)$$
$$\begin{aligned} (4 - \lambda)(-4 - \lambda) - 5 \cdot (-3) &= \\ = -16 - 4\lambda + 4\lambda + \lambda^2 + 15 &= \\ = \lambda^2 - 1 \end{aligned} \quad (2a-4, S)$$

Abb. 2: Musterlösung für Teilaufgabe 2a

Ausschlaggebend für diese Form der Darstellung ist die Aufteilung in sogenannte Lösungsschritte. Setzt sich ein Lösungsschritt aus mehreren Rechenschritten zusammen, dann gehören diese entweder zu einem bestimmten mathematischen Algorithmus oder einem bestimmten Gebiet der Mathematik (z.B. Terme vereinfachen).

### 2. Fehlertypen identifizieren

Es fallen sofort zwei Kategorien von Lösungsschritten ins Auge, die hier der Einfachheit halber als Unischritt (U), das ist ein Lösungsschritt in dem primär Inhalte der universitären Mathematik angesprochen werden (siehe z.B.

Abb.2, (2a – 3)), und Schulschritt (S), das sind Lösungsschritte die sich primär auf Fertigkeiten aus der Schulzeit beziehen, bezeichnet werden. In diesen beiden Lösungsschritten können Fehler entstehen, die vorerst in Methoden- (M), Verständnis- (V), Flüchtigkeitsfehler (F) und Algebraische Fehler (A) aufgeschlüsselt werden. So ist zum Beispiel ein Methodenfehler ein Fehler, der dadurch entsteht, dass eine mathematische Regel, eine Formel oder eine Methode falsch angewandt wurde (siehe Abb. 3).

$$= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{1 \pm 1}{2}$$

$$= \frac{1+1}{2} = 1 \hat{=} \lambda_1 \quad \checkmark \quad \frac{1-1}{2} = 0 \hat{=} \lambda_2 \quad \textcircled{2}$$

Abb. 3: Authentische Bearbeitung, Beispiel für einen Methodenfehler

### 3. Statistische Auswertungen

Für die möglichen Fehler aus der Teilaufgabe 2a unter Berücksichtigung nur der ersten vier Berechnungsschritte ergibt sich aus den Klausuren folgende Häufigkeitstabelle:

1. Eigenwertgleichung aufstellen (U)			2. Matrix: Addition (U)			3. Determinantenterm aufstellen (U)			4. Term vereinfachen (S)			
(M)	(V)	(F)	(M)	(V)	(F)	(M)	(V)	(F)	(M)	(V)	(F)	(A)
0	3	1	4	0	23	7	3	5	10	1	27	6

Abb. 4: Häufigkeitstabelle für die ersten vier Berechnungsschritte

Es wird deutlich, dass, obwohl das Verhältnis der Lösungsschritte bei 3:1 liegt, das Verhältnis der tatsächlich produzierten Fehler in den Lösungskategorien bei nur noch 46:44 liegt. Gewichtet auf die Anzahl der Lösungsschritte ergibt sich daraus ein Verhältnis von annähernd 16:44. Ein Fehler in einem Schulschritt tritt demnach fast 2,8-mal häufiger auf als ein Fehler in einem Unischritt. Eine derartige Fehleranalyse könnte damit nicht nur die allorts auffälligen mathematischen Defizite der Erstsemester-Studierenden bestätigen, sondern es ließen sich Aufgaben hinsichtlich der benötigten Fertigkeiten und deren Gewichtung untersuchen.

### Literatur

Rathmann, W. (2013). *Mathematik für Ingenieure D1*. Klausurangabe, Naturwissenschaftliche Fakultät der Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg, Erlangen.