

Begründen, Argumentieren und Beweisen in der Mathematik – theoretische Grundlagen und empirische Erkenntnisse

Das Lernen wissenschaftlicher Arbeitsweisen der Mathematik an der Hochschule, sowie ein altersgemäßer Einblick im Rahmen der Schule, sind als Ziele der mathematischen Bildung unbestritten. Die Sektion befasste sich aus theoretischer und empirischer Sicht mit zentralen mathematischen Aktivitäten und den damit verbundenen Lehr- und Lernprozessen. Im Fokus stand dabei die Diskussion von Ansätzen aus unterschiedlichen Forschungstraditionen, wofür insbesondere auch eine abschließende gemeinsame Diskussion vorgesehen war, welche von Michael Neubrand als Diskutant eingeleitet wurde.

Die Vorträge im Rahmen der Sektion setzten sich mitunter aus einer philosophischen Perspektive mit den Begriffen Rechtfertigen und Erklären auseinander. So wurde einerseits das *Rechtfertigen* insbesondere mathematischer Axiome als zusätzliche, und von Argumentieren und Beweisen abzugrenzende, Aktivität aufgegriffen und seine Bedeutung für schulischen Unterricht und Lernprozesse an der Universität diskutiert. Andererseits wurde ein Analyseschema für abduktive *Erklärprozesse* vorgestellt, und anhand der Erklärungen von Schülerinnen und Schülern im Rahmen von Problemlöseprozessen illustriert. Zwei empirische Beiträge beschäftigten sich explizit mit (kollaborativen) Beweisprozessen an der Hochschule. Hier wurden zum einen theoretisch abgeleitete Qualitätsindikatoren derartiger Prozesse empirisch operationalisiert und auf Zusammenhänge hin untersucht. Zum anderen wurde ein theoretisches Prozessmodell für das Konstruieren von Beweisen vorgestellt, das insbesondere das Erstellen eines Situationsmodells beinhaltet, und dessen Anwendbarkeit auf tatsächliche Konstruktionsprozesse demonstriert wurde. Schließlich befassten sich zwei Beiträge damit, wie Lehrkräfte im Unterricht mit Argumentationen und Erklären umgehen. Dabei wurde die Antizipation von Argumentationslinien von Schülerinnen und Schülern sowie deren Berücksichtigung in der Unterrichtsplanung untersucht, sowie ein interdisziplinäres Projekt vorgestellt, das domänenspezifische und -übergreifende Qualitätskriterien für gute Erklärungen von Lehrkräften exploriert.

Die Vorträge wurden anschließend durch Michael Neubrand eingeordnet, um die abschließende Diskussion vorzustrukturieren. Dabei machte er insbesondere zwei Dimensionen aus, hinsichtlich derer sich die Beiträge klassifizieren ließen:

1. *Der jeweils gewählte Zugriff* auf das zu untersuchende Phänomen wurde zwischen einem Pol der theoretischen Analyse und einem Pol des empirischen Vorgehens eingeordnet.
2. Die *Allgemeinheit der angestrebten Aussagen* wurde zwischen einem spezifischen, fallbezogenen Fokus und einem Fokus auf strukturelle, allgemeingültige Aussagen eingeordnet.

Anhand dieser Einordnung wurden Potentiale und Beschränkungen der einzelnen Zugänge innerhalb der vorgestellten Beiträge, sowie generell, diskutiert und Perspektiven für die Arbeit an einer kohärenten Beschreibung des Feldes aufgezeigt.

In der Diskussion wurden weiterhin die Beziehungen zwischen den jeweils gewählten Begriffen (z.B. Rechtfertigen, Beweisen, Argumentieren, Erklären) thematisiert. Als übergreifende Gemeinsamkeit wurde das „Offenlegen von Gründen für mathematische Aussagen“ vorgeschlagen. Ob und in welcher Weise eine weitere systematische Einordnung der Begriffe möglich und hilfreich ist, blieb jedoch zunächst offen.

Ziel der Sektion war primär, VertreterInnen der verschiedenen Forschungsperspektiven, die sich mit mathematischem Argumentieren beschäftigen, zu vereinen und den Austausch zwischen Forschungstraditionen zu intensivieren. Dass dabei zunächst mehr Fragen aufgeworfen als geklärt wurden, liegt in der Natur der Sache. Dennoch sind vor allem der kontinuierliche Austausch sowie die Arbeit an einer gemeinsamen begrifflichen Basis notwendig, um die Anschlussfähigkeit der verschiedenen Arbeiten zum mathematischen Argumentieren untereinander zu sichern. Perspektivisch ist für eine Entwicklung des Feldes eine Kombination unterschiedlicher Perspektiven innerhalb von sowie auch zwischen Einzelprojekten und Forschungsgruppen sicher fruchtbar, wahrscheinlich sogar notwendig.

Sektionsvorträge

Krömer, R. & Jahnke, H.-N.: Rechtfertigen in der Mathematik

Kirsten, K.: Identifizierung von Phasen und Aktivitäten im Beweisprozess von Studienanfänger/innen

Klostermann, C.: Fähigkeiten angehender Lehrkräfte bei der Antizipation von Schülerargumenten bei Begründungsaufgaben

Müller-Hill, E.: Charakteristika des Zusammenspiels von Deduktion, Induktion und Abduktion beim situierten vs. systematischen Erklären – ein theoretisch fundiertes Analyseschema

Ottinger, S., Kollar, I., & Ufer, S.: Mathematisches Argumentieren und Beweisen – eine individuell-kognitive und sozial-diskursive Fähigkeit?

Röhl, S. & Krauss, S.: Erklären im Mathematikunterricht