

Zusammenspiel von Deduktion, Induktion und Abduktion beim situierten vs. systematischen nomischen Erklären

In diesem Beitrag werden in aller Kürze zwei charakteristische Profile von Erklärprozessen vorgestellt, theoretisch fundiert und anhand von zwei Schülerbearbeitungen illustriert. Eine detailliertere Version findet sich in Müller-Hill 2017b.

Theoretischer Hintergrund

Nomisches mathematisches Erklären bedeutet Erklären entlang operativer Invarianzkriterien (Müller-Hill 2017a) wie funktionale und Objektivinvarianz (vgl. Tabelle). Solchen Erklärungen nutzen erklärende Muster, die die Invarianzkriterien in

Funktionale (oder lokale) Invarianz und Informativität		Invarianz unter Intervention an den Manifestationsbedingungen – je differenzierter der Interventionszusammenhang, desto <i>informativer</i> das Muster.
Bereichsinvarianz	Objektivinvarianz	Invarianz unter Variation der durch das nomische Muster beschriebenen Objekte oder Systeme.

geeignetem Umfang erfüllen und die Struktur kontrafaktischer Konditionale besitzen (vgl. ebd.):

Wenn eine bestimmte Manifestationsbedingung A aufträte, träte ein bestimmtes Ereignis E (als Manifestation bestimmter Eigenschaften der beteiligten Objekte) ein. Träte die Manifestationsbedingung A nicht ein, so träte auch E nicht ein.

Eine Differenzierung und Konkretisierung der Manifestationsbedingungen macht das Muster *informativer* (vgl. ebd.). Zur Analyse von Erklärprozessen erweist es sich als hilfreich, diese Erklärenskonzeption mit den Begriffen der Induktion, Deduktion und Abduktion, und einer Differenzierung von *selektiver* und *kreativer* Abduktion zu verbinden. Erklärprozesse werden dabei zunächst mithilfe eines idealtypischen, iterativen Schemas rekonstruiert (Abb. 1).

Im Hintergrund steht hier Peirces Verständnis des komplexen Zusammenspiels von Abduktion, De-

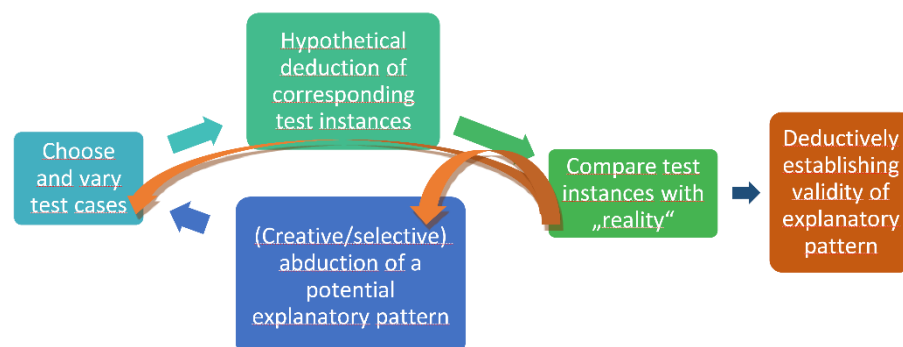


Abbildung 1: Iteratives Schema für Erklärprozesse (Müller-Hill 2017b)

duktion und Induktion als *Phasen* von Erklärprozessen. Die Differenzierung von selektiver und kreativer Abduktion geschieht in Anlehnung an Magnani

(2001): Selektive Abduktion bedeutet, dass die abduktiv Schließende die Regel bereits kennt, die das betrachtete Phänomen als Resultat des Vorliegens eines diese Regel instantiierenden Falls erklären soll. Eine kreative Abduktion bringt dagegen eine ihr neue Regel hervor.

Analysematrix für Erklärprozesse

In der Anwendung auf konkrete Erklärprozesse von Lernenden zeigen sich zwei charakteristische Erklärprofile (Abb. 2), die ich als *situiertes* und *systematisches* Erklären identifiziere (vgl. Müller-Hill 2016).

	Initial abduction	Quality of invariance	Informativity
Situated Explanation	creative	Emphasis on functional invariance, differentiated manifestation conditions	high (less systematizing power)
Systematic Explanation	selective	Emphasis on object invariance, less informative, more general manifestation conditions	low (more systematizing power)

Abbildung 2: Matrix zum systematischen und situierten Erklärprofil (Müller-Hill 2017b)

Situiertes Erklären knüpft an situiert erworbenes Handlungswissen an, meint das Testen oder Entwickeln von Erklärhypothesen durch Manipulation und Variation anhand von Darstellungen und ist nahe an unserem alltäglichen, handlungsorientierten Verständnis von Erklären als Aufdecken von kausalen Beziehungen (Müller-Hill 2017a):¹ Was passiert, wenn ich eingreife, etwas verändere? Tritt dasselbe Phänomen auf oder tritt daran eine wesentliche Veränderung ein? Für situiertes Erklären sind kreative Abduktionen initiativ, das Kriterium der funktionalen Invarianz steht im Vordergrund. Ergebnis des situierten Erklärens ist ein informatives, auf die betrachteten Testfälle konkret zugeschnittenes erklärendes Muster. *Systematisches Erklären* dient der Wissensstrukturierung, Vereinheitlichung und Systematisierung, strebt danach, erklärende Muster heranzuziehen, die möglichst viele einzelne Phänomene oder ganze Phänomenbereiche umfassen und vernetzen, geschieht auf Basis des bestehenden Hintergrundwissen über den situativen Kontext des Phänomens hinaus und stellt gegenüber dem situierten Erklären stärker die Objektivinvarianz in den Vordergrund, ggf. zulasten der Informativität des erklärenden Musters. Charakteristisch ist eine selektive initiierende Abduktion, in dem Sinne, dass ein bereits bekanntes Muster vereinheitlichend auch zur Erklärung für das betrachtete Explanandum herangezogen wird.

¹ Dies verallgemeinert, was Baccaglini-Frank (2010) als „instrumented abduction“ für Entdeckungs- und Erklärungsprozessen mit dynamischer Geometrie Software beschreibt.

Exemplarische Anwendung der Analysematrix

Gegeben sind die folgenden Daten: a) 1,2,3,5,6,7, b) 2,3,4,5,6,7,8, c) 1,1,1,10. Welche der Datenreihen hat den größten Durchschnitt? Überlege zuerst und stelle eine Vermutung auf, ohne zu rechnen. Schreibe auf, wie Du zu dieser Vermutung gekommen bist.

Die nebenstehende Aufgabe (variiert nach Leuders, 2009, S. 195) wurde von Schülerinnen

und Schülern einer 6. Marburger Gymnasialklasse bearbeitet. Anhand von zwei exemplarischen Bearbeitungen lassen sich Aspekte des situierten und des systematischen Erklärens aufzeigen und illustrieren (vgl. im Detail Müller-Hill 2017b).

<p>Lynn: „Ich denke es ist (b). Ich habe mir (a), (b) und (c) angeschaut und gesehen, dass (a) und (b): 1.) größere Zahlen als (c) haben und 2.) dass es mehr Zahlen sind.“</p>	<p>Ronya: „Ich glaube, dass (b) den größten Durchschnitt hat. (b) hat zwar die meisten Zahlen und muss deshalb auch durch eine höhere Zahl geteilt werden, aber bei (b) sind auch viel hohe Zahlen.“</p>
<p>Mögliche Rekonstruktion von Lynns Muster: Würde man bei einer Datenreihe einzelne Daten vergrößern und mehr Daten hinzunehmen, so vergrößerte sich auch der Durchschnittswert.</p>	<p>Mögliche Rekonstruktion von Ronyas Muster: Würde man bei einer Datenreihe mehr Daten hinzunehmen und viele davon auf hohe Werte erhöhen, so vergrößerte sich auch der Durchschnittswert.</p>

Beide benennen relevante Bedingungsbestandteile „Datenanzahl“ und „Höhe der Datenwerte“, verknüpfen sie jedoch inhaltlich unzureichend mit „und“, „zwar“, „aber“. Sie formulieren sehr allgemeine Bedingungen für einen höheren Durchschnittswert: „viel hohe Zahlen“, „mehr/größere Zahlen“. Beide Muster sind wenig informativ und erscheinen selektiv abduziert, denn sie beziehen sich auf vom Rechnen mit natürlichen Zahlen her bekannte Regelmäßigkeiten (etwa die Monotonie der Addition). Lynns und Ronyas Antworten dokumentieren hier also eher systematische Erklärungsansätze.

Mit zusätzlichen Teilaufgaben wurden weitere Durchläufe eines Erklärzyklus angestrebt, darunter: „Gib, ohne zu rechnen, eine weitere Datenreihe an, deren Durchschnittswert größer als der der gegebenen Datenreihen ist. Begründe.“ Lynn liefert als neue Datenreihe: 3,4,5,6,7,8,9 und schreibt: „Es kommt eine neue Zahl hinzu die größer ist (9), dafür muss eine kleinere weg (die 2). Der Unterschied zwischen 2 und 9 ist 7. [...] Man muss nicht durch mehr Zahlen teilen, aber es ist noch eine 7 dazugekommen. [...]“ und beginnt dabei sogar die Deduktion ihrer Hypothese. Ronya gibt die neue Datenreihe: 4,5,6,7,8,9,10 an. Sie schreibt: „Bei b) ist vorne eine Stelle weggenommen worden und hinten eine dran gekommen, und b) war größer als a).“ Beide abduzieren auf der Basis einer kleineren Gruppe von Testfällen a) und b) kreativ jeweils ein neues, informativeres Muster mit differenzierteren Manifestationsbedingungen (Lynns Muster ist sogar voll objektinvariant). Sie benennen konkrete, spezifische analoge Manipulationen der gegebenen Reihen

a) und b), die jeweils zur Erhöhung des Durchschnittswertes führen. Lynn und Ronya dokumentieren hier also situierte Erklärungsansätze.

Mögliche Rekonstruktion (Lynns 2. Muster): Wenn man bei einer Datenreihe eine Zahl hinzunimmt, die größer als die anderen ist, und dafür eine kleinere weglässt, dann erhöhte sich der Durchschnittswert.	Mögliche Rekonstruktion (Ronyas 2. Muster): Wenn man aus einer Datenreihe mit aufeinanderfolgenden Zahlen eine neue Datenreihe aufeinanderfolgender Zahlen bildete, indem man mehrere Daten am Anfang der Reihe streicht und genausoviele hinten anhängt, so erhöhte sich der Durchschnittswert.
--	---

Fazit

Lernende wechseln zwischen systematischen und situierten Erklärungsansätzen, beziehen diese aber nicht selbstverständlich aufeinander. Die vorgestellten Beispiele deuten exemplarisch darauf hin, dass situiertes Erklären durch Fragen nach selbst-generierten neuen Testfällen für eine Vermutung initiiert werden kann, und dass dies ein sinnvoller, explizierender Zwischenschritt für Lernende auf dem Weg zu verständigem systematischen Erklären sein kann, wie es beispielweise durch sogenannte „Plantagenaufgaben“ (als eine solche wurde auch die oben genannte ursprünglich konzipiert) eher implizit angestrebt wird. Letztere zielen – als Erkläraufgaben im obigen Sinne rekonstruiert – u.a. auf die geeignete Adaption von außerhalb des aktuellen Geltungsbereichs eines für eine bestimmte Auswahl von Testfällen (in obigem Beispiel etwa (a) und (b)) abduzierten Musters liegenden Testfällen (im Beispiel: (c)).

Idealerweise können situiertes und systematisches Erklären im Unterricht spiralgig zusammenspielen und die jeweilig generierten erklärenden Muster reflektierend aufeinander bezogen werden. Dies trägt der allgemeineren Idee Rechnung, dass sich situiertes Lernen und systematischer Wissensaufbau und Theoriebildung im Unterricht ergänzen sollten.

Literatur

Leuders, T. (2009): Intelligent üben und Mathematik erleben. In: T. Leuders et al. (Eds.): *Mathemagische Momente*. Berlin: Cornelsen, 130-143.

Magnani, L. (2001). *Abduction, reason and science: Processes of discovery and explanation*. Dordrecht: Kluwer.

Müller-Hill, E. (2016). Erklären-warum zwischen systematischem Wissensaufbau und handlungsorientiertem Lernen, in: A. Feindt et al. (Hrsg.), *Friedrich Jahresheft 2016* (S. 70-72), Velber: Friedrich Verlag.

Müller-Hill, E. (2017a). Ein handlungsorientiertes Konzept nomischer mathematischer Erklärung. *Journal für Mathematikdidaktik*. DOI 10.1007/s13138-017-0115-y

Müller-Hill, E. (2017b). A reconstruction scheme for explanation tasks and processes – theoretical foundation and first applications, eingereicht.